lei 5,60

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1981

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE ALGEBRĂ PENTRU CLASELE IX—XII

C. NĂSTĂSESCU
M. BRANDIBURU

C. NIȚĂ
D. JOIȚA

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE ALGEBRĂ

pentru clasele IX—XII

Partea întîi

ENUNȚURI

Capitolul I

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $2+3=5$; b) $2\cdot 3<6$; c) $4\cdot 4=16$; d) $4+3<1+5$; e) $4\cdot 5-6=2\cdot 7$; f) $4-2(5-3)=1$; g) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}<1$.

2. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) există un număr întreg x, astfel încît $x^2-2x-3=0$;
b) există un număr real x, astfel încît $|x-1|+|x-2|=0$;
c) există un număr real x, astfel încît $x^2-x+1=0$;
d) există un număr real x, astfel încît $|x-1|+|x^2-3x+2|=0$;
e) există un număr real x, astfel încît $|x-1|-|x-2|<0$;
f) oricare ar fi numărul real x, avem $x^2+(x-1)^2>0$;
g) oricare ar fi numărul real x, avem $(x+1)^2+|x^2-2x+3|>0$;
h) oricare ar fi numărul real x, avem $|x-1|+|x-3|\neq 0$;
i) oricare ar fi numerele reale x și y, avem $x^2+y^2+1>0$;
j) oricare ar fi numerele reale x și y, avem $x^2+y^2>0$;
k) există numerele reale x și y astfel încît $|x-1|+y^2+y+1=0$.

3. Folosind tabele de adevăr, să se verifice:

a) $p\vee q\equiv q\vee p$; b) $p\wedge q\equiv q\wedge p$; c) $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$; d) $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$; e) $p\to\neg q\equiv\neg(p\wedge q)$; f) $\neg p\to q\equiv p\vee q$; g) $(p\to q)\to q\equiv p\vee q$; h) $p\vee p\equiv p$; i) $p\wedge p\equiv p$; j) $p\wedge q\equiv\neg(\neg p\vee\neg q)$; k) $p\vee q\equiv\neg(\neg p\wedge\neg q)$; l) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$; m) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

4. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii (sau identic adevărate):

a) $\neg(p\vee q)\to(\neg p\wedge\neg q)$; b) $\neg(p\wedge q)\to(\neg p\vee\neg q)$; c) $(p\wedge(p\to q))\to q$; d) $(\neg q\wedge(\neg p\to q))\to p$; e) $(\neg q\wedge(p\to q))\to\neg p$; f) $((p\to q)\wedge(\neg p\to q))\to q$; g) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$; h) $(p\vee(p\wedge q))\longleftrightarrow p$; i) $(p\wedge(p\vee q))\longleftrightarrow p$.

5. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $(\exists x)\ (x^2-5x+6=0)$ unde x desemnează un număr întreg;
b) $(\exists x)\ (2x^2-x-3=0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
c) $(\exists x)\ (|x-6|+|x+1|=0)$ unde x desemnează un număr real;
d) $(\exists x)\ (2x-6<0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
e) $(\forall x)\ (3x-1<0)$ unde x desemnează un număr real pozitiv;
f) $(\forall x)\ (|x-2|+|x+3|>0)$ unde x desemnează un număr real;
g) $(\forall x)\ (|x-2|+|2x^2-3x+2|>0)$ unde x desemnează un număr real;

h) $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(x^2 + y^2 - y + 1 > 0)$ unde x şi y desemnează numere reale;

i) $(\exists x)$ $(\exists y)$ $(x^2 + xy + y^2 + 1 = 0)$ unde x şi y desemnează numere reale.

6. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x - y = 3$" unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\,(\exists x)\ p(x, y) \to (\exists x)\,(\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

7. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x + y \leqslant 1$" unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\,(\exists x)\ p(x, y) \to (\exists x)\,(\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

8. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x \leqslant y$" unde x, y desemnează numere întregi.

a) Să se determine valorile de adevăr pentru propoziţiile: $p(1, 5)$; $p(3, -1)$; $p(3, 4)$; $p(3, 1)$; $p(45, 11)$; $p(-2, -10)$.

b) Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:

$$(\forall x)\ \forall(y)\ p(x, y),\ (\forall x)\ (\exists y)\ p(x, y),\ (\forall y)\,(\exists x)\,p(x, y),\ (\exists x)\,(\exists y)\,p(x, y).$$

9. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(\forall x)$ $[(x > 0) \to (x^2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;

b) $(\forall x)$ $(\forall y)$ $[(x < y) \to (x^2 < y^2)]$, unde x, y sînt numere reale;

c) $(\forall x)\,[(x < -2) \to (|\,x - 1\,| - 2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;

d) $(\forall x)$ $(\forall y)\,[(x^2 = y^2) \to (x = y)]$, unde x, y desemnează numere reale pozitive;

e) $(\forall x)$ $(\forall y)$ $[(x^2 = y^2) \to (x = y)]$, unde x şi y desemnează numere reale oarecare.

Capitolul II

MULŢIMI

1. Să se determine mulţimile:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 6x - 7 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;

c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$;

e) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; f) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 2 = 0\}$;

g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |\,x - 1\,| + 1 = 0\}$; h) $\{x \in \mathbf{R} \mid |\,x - 1\,| - |\,x - 3 = 1\}$;

i) $\{x \in \mathbf{R} \mid |\,x^2 - 4\,| - 2x + 1 = 0\}$; j) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2\,|\,x\,| + 3 = 0\}$;

k) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$; l) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0\}$;

m) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^3 - 5x + 1 = 0\}$; n) $\{x \in \mathbf{Q} \mid |\,x - 1\,| + |\,x - 2\,| = 3\}$;

p) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1\,| + |\,x + 2\,| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

q) $\{x \in \mathbf{R} \mid |\,x - 1\,| - |\,x - 4\,| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |\,x - 2| - |x - 3| = 1\}$.

2. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,

b) $A \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$,

c) $B - A = \{4, 5, 6, 11\}$.

3. Să se determine mulţimea E în următoarele cazuri:

a) $\{1, 2, 3, 4\} \subset E$, $\{3, 4, 5, 6\} \subset E$, $E \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi $\{7, 8\} \cap E = \emptyset$;

b) $E \subset \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $E \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4\} \subset E$ şi $7 \notin E$.

4. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 4\}$;

c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$; d) $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$.

5. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; c) $\{3, 9\} \cap B = \emptyset$, d) $A \cap B = \{1\}$.

6. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine submulţimile B ale lui A astfel încît $B \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$.

7. Fie mulţimea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Să se determine mulţimea formată din toate submulţimile lui A care au proprietatea că nu conţin elementele a şi c.

8. Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine mulţimea submulţimilor lui X care au cel mult două elemente.

9. Să se determine mulţimea E şi submulţimile A şi B ale lui E, ştiind că:

a) $E - A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; b) $E - B = \{5, 6, 11, 12\}$; c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Fie mulţimile $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 8, 9\}$. Să se determine mulţimea X astfel încît să aibă loc relaţia $(A - X) \cup (X - B) = \{1, 3\}$, X să aibă 4 elemente şi $\{3, 9\} \subset X$.

11. Fie mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine mulţimea X astfel încît să aibă loc relaţia $A - X = \{1, 2, 3\}$, $X \subseteq B$ şi X să aibă 3 elemente.

12. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B \supset \{1, 2\}$; c) $3 \notin B$; d) Numărul de elemente ale lui A să fie mai mic decît numărul elementelor lui B.

13. Să se arate că dacă A şi B sînt două mulţimi, atunci:

a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$; b) $A = B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ şi $B - A = \emptyset$.

14. Fie A şi B două submulţimi ale lui E. Dacă notăm $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, să se arate că

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \complement_E B \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap B \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B \cap C) \cup (A \cap B \cap C),$$ oricare ar fi submulţimile A, B, C ale lui E.

15. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cup Y = E$.

16. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cap Y = \emptyset$ (X, Y sînt submulţimi ale lui E).

17. Să se determine mulţimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \dfrac{6n - 7}{2n + 1},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

18. Să se determine mulţimea

$$A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n^2 + 7}{3n + 1},\ n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

19. Să se determine mulţimea $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R} \text{ astfel încît } x = \dfrac{a^2 - a + 1}{a + 1}\right\}$.

20. Să se determine mulţimea $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \exists\, n \in \mathbf{N},\ x = \dfrac{3n^2 + 6n + 1}{n^2 + 1}\right\}$.

21. Să se determine mulţimea

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 2 \text{ şi } |x| - 2|y| = -1\}.$$

22. Să se determine mulţimea

$$A = \{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid ab = 2160 \text{ şi } c.m.m.d.c.\ (a, b) = 12\}.$$

(*c.m.m.d.c.* (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.)

23. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 9y^2 - (x + 1)^2 = 32\}$.

24. Să se determine mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x + 1| - |x - 2| < 3\}$.

25. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 - 2xy + 3y^2 = 8\}$.

26. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x + 3y = 1980\}.$$

27. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 4x + 3y = 1980\}.$$

28. Să se determine mulţimile A şi B şi numerele m, n, p, ştiind că: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + nx + p = 0\}$, $A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$.

29. Fie $m \in \mathbf{R}$. Considerăm mulţimea,

$A_m = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R} \text{ astfel încît } x = \dfrac{a^2 + a + m}{a + 1}\right\}$. Să se arate că:

I) $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$;

II) $A_m = \mathbf{R}$, $(\forall)\, m < 0$;

III) Mulţimile A_m, cînd m parcurge mulţimea $\mathbf{R}$, nu au nici un element comun.

30. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$, numere impare. Să se arate că: $\{x \in \mathbf{Q} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset$.

31. Fie mulţimile: $A = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N},\ x = 3n + 1\}$,

$B = \{x \mid \exists m \in \mathbf{N},\ x = 7m - 1\}$.

Să se arate că $A \cap B = \{x \mid \exists t \in \mathbf{N},\ x = 21t + 13\}$.

32. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, are loc egalitatea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m^2 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\} = \emptyset.$$

33. Fie a, b două numere reale. Să se arate că, dacă $a + b + 1 = 0$, $a \neq b$, $a, b \neq 1$ sau $b = \dfrac{a^2}{4}$ şi $a > 4$, mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$$

are trei elemente.

34. Să se arate că mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 8x + 2m^2 = 0\}$ are exact două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

35. Să se arate că mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 + 8x + m^2 = 0\}$$

are unul sau două elemente. Să se determine m pentru care A are un singur element.

36. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + m - 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m + 1)x + m = 0\}.$$

37. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2(m + 1)x + m = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2mx + m - 1 = 0\}$$

are exact patru elemente.

38. Să se determine numărul real m, astfel încît mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m-1)x + m + 2 = 0\} \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset.$$

39. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + m = 0\} \cap [0, \infty). \text{ Discuție.}$$

40. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + m = 0\}. \text{ Discuție.}$$

41. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0]. \text{ Discuție.}$$

42. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 = 0\} \cap [0, +\infty). \text{ Discuție.}$$

43. Să se determine a și b astfel încît să avem:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

44. Fie A și B două submulțimi ale lui E. Folosind problema **14**, să se determine submulțimea X a lui E, astfel încît să avem egalitatea

$$(A - X) \cup (X - A) = B.$$

Capitolul III

FUNCȚII

1. Fie $A = \{0, 1\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile de la mulțimea A în mulțimea B. Să se precizeze cîte din acestea sînt injective.

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile $f: A \to B$ astfel încît $f(1) = c$.

3. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{5, 7, 9\}$. Să se determine toate funcțiile $f: A \to B$ astfel încît $f(1) \neq 5$ și $f(2) \neq 9$.

4. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît:

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1 \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

5. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avînd proprietatea:

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

6. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît

$$f(1) \neq 0 \text{ și } f(x) \cdot f(y) = f(x + y - xy), \ (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care să verifice relația: $f(x) + f(n - x) = x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Există funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) - f(-x) = x^2$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$?

9. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfăcînd condiția:

$$mf(x - 1) + nf(-x) = 2 \mid x \mid + 1.$$

Să se determine m și n astfel încît funcția f să îndeplinească condițiile $f(-2) = 5$ și $f(1) = 1$.

10. Există funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f(x - 1) - f(1 - x) = x, \ (\forall) x \in \mathbf{R}?$$

11. Să se determine funcția f care verifică relația:

$$4f(x) + 3f(-x) = c \mid x \mid, \ c \in \mathbf{R}.$$

Să se traseze graficul funcției astfel determinate.

12. Să se determine funcțiile f, de gradul întîi, astfel încît $f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

13. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Să se determine

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}.$$

14. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x - 1, x + 1)$,

b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \min(3x - 1, x + 3)$.

15. Fie funcţiile: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + 2$ şi

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = |x - 2| + 1$.

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

16. Fie funcţiile: $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 2n$ şi

$$g : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

17. Fie funcţiile:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{dacă } x \leqslant -1, \\ -2, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

şi

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} -3, & \text{dacă } x \leqslant -2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

18. Fie funcţiile:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0, \\ x^2 + 3, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

şi

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x + 1.$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

19. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 2, \\ x + 1, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze f^{-1}.

20. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geqslant 2, \\ 3x - 2, & \text{dacă } x < 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

21. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \leqslant 4, \\ 2x - 7, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$

Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

22. Să se arate că următoarele funcţii nu sînt injective:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$; b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 - 7x^4 + 1$; c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$; d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{1981} - 4x^{1979} + 1$.

23. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definită prin egalitatea: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Să se arate că pe intervalul $(0, 1]$, f este strict descrescătoare iar pe intervalul $[1, +\infty)$ este strict crescătoare.

24. Fie funcţiile f şi g, definite pe $\mathbf{R}$ cu valori în $\mathbf{R}$, unde

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4 \text{ şi } g(x) = x^3 + x + 2.$$

Să se arate că f nu este injectivă, iar g este injectivă.

25. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2], \\ mx - 3, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$

a) Să se determine m astfel încît graficul funcţiei să treacă prin punctul $A(3, 3)$.

b) Să se cerceteze dacă funcţia f este injectivă.

26. Fie a un număr natural. Definim funcţia: $f_a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ astfel încît $f_a(n)$ este ultima cifră a numărului a^n.

I) Să se arate că $\exists b$, $0 \leqslant b \leqslant 9$ astfel încît $f_a = f_b$.

II) Să se arate că oricare ar fi a, f_a este o funcţie periodică (adică există un număr natural n_0 astfel încît $f_a(n + n_0) = f_a(n)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ şi $n \neq 0$).

27. Fie A o mulţime care are cel puţin trei elemente. Notăm cu $S_A = \{f : A \to A \mid f \text{ bijecţie}\}$. Dacă $f \in S_A$ şi $f \circ g = g \circ f$, $(\forall) g \in S_A$, atunci $f = 1_A$.

28. Fie $f : A \to B$ o funcţie oarecare. Dacă $A' \subset A$ este o submulţime a lui A, mulţimea $f(A') = \{f(x) \mid x \in A\}$ care este o submulţime a lui B se numeşte: *imaginea submulţimii A' prin funcţia f*.
Dacă $A' = A$, atunci mulţimea $f(A)$ se numeşte *imaginea funcţiei f* şi se notează $\operatorname{Im} f$.

a) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se determine:

$$f([-1, 1]);\ f([-2, 0]);\ f((-2, 1]);\ f((1, 2)).$$

b) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 2| + 1$.
Să se determine: $f([1, 3])$; $f([-1, 3])$; $f([1, +\infty))$.

c) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 2| - 1$.
Să se determine: $f([0, 1])$; $f([-2, 1])$; $f([-3, 2])$.

29. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că:

a) Dacă X şi Y sînt două submulţimi ale lui A, atunci:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y) \text{ şi } f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y).$$

b) f este injectivă dacă şi numai dacă $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, oricare ar fi submulţimile X şi Y ale lui A.

30. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') \subset \complement f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$;

b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') \supset \complement f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$;

c) f este bijectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') = \complement f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$.

($\mathcal{P}(A)$ este mulţimea părţilor lui A.)

31. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Fie $\mathcal{P}(A)$ şi $\mathcal{P}(B)$ mulţimea părţilor lui A şi respectiv ale lui B. Definim funcţia $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $f_*(A') = f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$. Să se arate că:

a) f injectivă $\Leftrightarrow f_*$ injectivă;
b) f surjectivă $\Leftrightarrow f_*$ surjectivă;
c) f bijectivă $\Leftrightarrow f_*$ bijectivă.

32. Fie funcţia *semn*, sgn: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (2x - 1) \operatorname{sgn} x$;
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| \operatorname{sgn} x$;
c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1) + x \operatorname{sgn}(x - 2)$.

Capitolul IV
NUMERE REALE
(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

Dacă a, b, c sînt numere reale, astfel încît oricare două sînt diferite între ele, să se demonstreze egalităţile:

1. $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

2. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

3. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

4. $$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab.$$

5. $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}.$$

6. $$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} = \frac{bc + ca + ab}{a^2b^2c^2}.$$

Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze egalităţile:

7. $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0;$$ a, b, c, d fiind diferite între ele.

8. $$\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)} = \frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}.$$

Generalizare.

9. Fie a, b, c numere reale nenule, astfel încît oricare două sînt diferite între ele. Să se arate că produsul

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

este egal cu:

I) 9, dacă $a+b+c=0$;

II) 1, dacă $|c|=|a-b|$.

10. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

Să se deducă de aici că, dacă

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3,$$

atunci $(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. I) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să arate că

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2];$$

II) Dacă $a^3+b^3+c^3=3abc$, atunci $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.

12. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, să se arate că:

I) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$;

II) $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geqslant 6abc$;

III) $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b)ab+(b+c)bc+(c+a)ca$.

13. Să se demonstreze că, dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, astfel încît $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 9.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

14. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

15. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a+b=2$. Să se demonstreze că

$$a^4+b^4 \geqslant 2.$$

16. Să se demonstreze că, din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi dacă şi numai dacă

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4).$$

17. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

atunci pentru n, număr natural, avem

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

18. I) Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă m şi n sînt numere naturale de aceeaşi paritate, atunci

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2};$$

II) Să se deducă, de aici, că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^6+b^6}{2}.$$

19. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, atunci

$$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

20. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

21. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, să se arate că

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

22. Să se demonstreze că

I) $ab+ac+bc \leqslant a^2+b^2+c^2$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$;

II) $ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqslant \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$;

III) *Generalizare.* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \leqslant \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

23. Fie numerele raţionale $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, unde $b_i>0$, pentru $i=1, 2, \ldots, n$. Să se demonstreze că

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}.$$

4. 2 Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \leqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} a_i.$$

25. I) Dacă a, b, t sînt numere reale pozitive astfel încît $a > b > t$, atunci $(a + t)(b - t) < ab$.

II) Să se arate că produsul a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este maxim dacă toți factorii sînt egali.

26. I) Dacă a, b sînt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

II) Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

III) *Generalizare.* Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

(*media geometrică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media aritmetică* a lor).

În ce condiții are loc egalitatea?

27. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, a', b', c', are loc inegalitatea:

$$\sqrt[3]{(a + a')(b + b')(c + c')} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'}.$$

28. Fie n un număr natural. Atunci

I) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)$; II) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.

29. Să se arate că suma a n numere reale pozitive, al căror produs este constant, este minimă în cazul în care numerele sînt egale între ele.

30. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

31. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1a_2 \dots a_n} \geqslant 3^n.$$

32. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1\right)\left(\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1\right) \dots \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1\right)\left(\frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1\right) \geqslant 3^n.$$

33. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}$$

(*media armonică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media geometrică* a lor).

În ce condiții are loc egalitatea? (vezi ex. 26).

34. Fie $k_1, k_2, ..., k_n$ numere naturale și $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că produsul $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, unde suma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este constantă, este maxim atunci cînd numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt proporționale, respectiv, cu $k_1, k_2, ..., k_n$.

35. Să se demonstreze că suma pătratelor a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este minimă în cazul în care numerele sînt egale.

36. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

37. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Mai mult, egalitatea are loc numai în cazul în care numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt proporționale, respectiv, cu $b_1, b_2, ..., b_n$. (inegalitatea Cauchy-Buniakovski).

38. Să se demonstreze că:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2,$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt numere reale pozitive.

39. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ sînt numere reale pozitive, să se demonstreze că

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \dots + \sqrt{a_nb_n} \leqslant \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

40. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

(inegalitatea lui Minkovski).

41. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_1|.$$

42. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

43. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}\right| \leqslant |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$

44. I) Dacă $a, a', b, b' \in \mathbf{R}$, atunci

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - (ab + a'b')^2 = (ab' - a'b)^2;$$

II) *Generalizare.* Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

45. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2},$$

unde max (a, b), respectiv min (a, b), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a și b.

46. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2(\max(a, b, c) - \min(a, b, c)),$$

unde max (a, b, c), respectiv min (a, b, c), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a, b, c.

47. Fie $x \in \mathbf{R}$ și se notează $x_+ = \dfrac{x + |x|}{2}$ și $x_- = \dfrac{-x + |x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$ și $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficul funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x_+$ și $g(x) = x_-$.

48. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, ecuația $3x^2 + 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ are rădăcini reale dacă și numai dacă $a = b = c$.

49. Fie a și b numere reale pozitive. Să se scrie în ordine crescătoare numerele

$$a, \; b, \; \frac{a + b}{2}, \; \sqrt{a^2 + b^2}.$$

50. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile:

I) $|3x + 2| = 5$; II) $|x + 1| = |x - 2|$; III) $|x - 1| + |x| + |x + 1| = x + 2$; IV) $||x| - 2| = 10$; V) $||x| - |x + 1|| = x + 2$; VI) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

51. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale inecuațiile:

I) $|x - 2| \leqslant 1$; II) $|x + 2| > 1$; III) $|x - 1| + |x| - \leqslant 2$; IV) $|x + 1| + |x| > 2$; V) $|x - 1| + |x - 2| \leqslant 0$; VI) $|x + 1| + |x - 2| > 0$; VII) $|x - 1| + |x + 1| \leqslant x + 3$; VIII) $|x + 1| + |x - 2| > x + 1$; IX) $|x + 1| \leqslant |x - 1|$; X) $|x + 2| > |x - 1|$.

52. Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) -5; b) $\dfrac{17}{6}$; c) $-\dfrac{3}{4}$; d) 0; e) $\dfrac{27}{11}$; f) $-\dfrac{523}{21}$; g) $-\dfrac{201}{19}$.

53. Pentru fracțiile zecimale periodice următoare să se determine numărul rațional pe care-l reprezintă și să se verifice apoi, prin algoritmul de împărțire, că se obține fracția zecimală inițială:

a) 3, (6); b) 1,72 (32); c) -3, (12); d) 0,01 (25); e) -4,3(042); f) -0,001(3); g) 0,01(02).

54. Să se arate care dintre numerele următoare sînt raționale și care iraționale:

a) $-1{,}56$; b) 1, (560); c) $-2{,}53(9)$; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{6}$; g) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

h) $\sqrt[3]{2}$; i) $\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt[3]{6}$; k) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

55. Fie $1 \leqslant a \leqslant 9$. Să se arate că fracția

$$0{,}a0a00a000a0000a \ldots$$

(după primul a urmează un 0, după al doilea sînt doi de 0 etc.) reprezintă un număr irațional.

56. Să se arate că fracția zecimală infinită 0,123456789101112..., în care după virgulă sînt scrise, consecutiv, toate numerele naturale nenule în ordine crescătoare, reprezintă un număr irațional.

57. Să se arate că în reprezentarea zecimală a oricărui număr irațional există cel puțin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

58. Să se dea exemple de numere iraționale pentru care numai două cifre, respectiv numai trei cifre, se repetă de o infinitate de ori.

59. Să se dea un exemplu de un număr rațional a și de un număr irațional b astfel încît

$$|\sqrt{3} - a| < \frac{1}{1\,000} \text{ și } |\sqrt{3} - b| < \frac{1}{1\,000}.$$

60. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$. Să se arate că există între a și b cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

61. Să se arate că pentru orice număr rațional pozitiv a, astfel încît $a^2 < 2$ (respectiv $a^2 > 2$), există un număr rațional pozitiv b, astfel încît $a^2 < b^2 < 2$ (respectiv $a^2 > b^2 > 2$).

62. Să se arate că numerele $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sînt iraționale.

63. Fie m și n numere naturale. Să se găsească condiții în care numerele $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ și $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ sînt iraționale. Dar dacă m și n sînt numere raționale pozitive?

64. Să se arate că, dacă a este un număr irațional pozitiv, atunci $\sqrt{a}$ este un număr irațional.

65. Să se demonstreze că:

I) Suma dintre un număr rațional și unul irațional este un număr irațional. Analog, pentru diferență.

II) Dacă a este irațional, atunci $\dfrac{1}{a}$ este irațional.

66. Fie a și b numere iraționale astfel încît $a + b$ este rațional. Să se demonstreze că numerele: $a - b$, $a + 2b$ sînt iraționale.

67. Fie $a, b, a', b' \in \mathbf{Q}$, astfel încît $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Atunci

I) $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$.

II) $a + \sqrt{b} \neq a' - \sqrt{b'}$, pentru orice numere raționale a, b, a', b' iar $\sqrt{b}$ să fie irațional.

68. Să se determine numerele naturale n astfel încît $\sqrt{n^2 + 1}$ să fie rațional.

69. Să se determine cele mai mici numere naturale n, pentru care este adevărată inegalitatea $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, dacă

I) $\varepsilon = 0{,}001725...$; II) $\varepsilon = 0{,}0003254...$

70. Să se spună care dintre numerele, din perechile de numere următoare, este mai mare:

a) $5{,}34297...$ şi $5{,}34298...$; b) $-6{,}2739...$ şi $-6{,}2736...$; c) $\frac{7}{3}$ şi $2{,}(42)$;

d) $-\frac{5}{7}$ şi $-0{,}7(32)$; e) $-2{,}2$ şi $-2{,}1(9)$; f) π şi $3{,}14$.

71. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}, prin lipsă şi prin adaos, pentru numerele:

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{2}{5}$; e) $\sqrt{11}$; f) $-\sqrt{11}$; g) $\frac{7}{13}$;

h) $-\frac{7}{13}$; i) $\frac{13}{11}$; j) $-\frac{13}{11}$.

72. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale sumei $x+y$, dacă

a) $x = 3{,}2745...$ şi $y = 2{,}3478...$;
b) $x = 10{,}7373...$ şi $y = -11{,}0354...$

73. Să se găsească primele două cifre, după virgulă, ale produsului xy, dacă:

a) $x = 1{,}3426...$ şi $y = 1{,}1243...$;
b) $x = 2{,}1357...$ şi $y = 3{,}2153...$.

74. Să se găsească primele patru cifre, după virgulă, ale sumelor

a) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$; c) $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3}+\sqrt{5}$;

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; f) $\sqrt{3}-\frac{11}{9}$; g) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

75. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale produselor:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; c) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{7}$; d) $-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{5}$; e) $-\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$;

f) $-\frac{11}{9}\cdot\sqrt{5}$; g) $-0{,}710710071... \times \sqrt{6}$.

76. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, prin lipsă şi prin adaos, pentru numerele:

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$; c) $\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

d) $\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$.

77. a) Folosind teorema lui Pitagora, să se construiască cu rigla şi compasul segmentele de lungime:

2; 3; $2,(6)$; $2{,}5$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{10}$.

b) Să se figureze, pe axa reală, punctele care au ca abscise opusele numerelor de la punctul a).

78. Să se determine numerele raţionale $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu $0,(272)$.

79. a) Fie $0 < \frac{a}{b} < 1$ un număr raţional, unde $a, b > 0$. Să se arate că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, avem

$$\left|\frac{a+n}{b+n} - 1\right| < \left|\frac{a}{b} - 1\right|.$$

b) Mai mult, să se arate că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, un număr real arbitrar, există n_0 astfel încît

$$\left|\frac{a+n_0}{b+n_0} - 1\right| < \varepsilon.$$

80. Să se determine numerele întregi k, astfel încît rădăcinile ecuaţiei

$$kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$$

să fie raţionale.

81. Să se demonstreze că, dacă $a, b, c, \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sînt numere raţionale, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sînt, de asemenea, numere raţionale.

Generalizare.

82. Fie a un număr real şi notăm cu $\{a\} = a - [a]$ partea fracţionară a sa, iar $n \geqslant 2$ un număr natural. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(a) = \{a^n\sqrt{2}\}$ nu este injectivă.

83. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\frac{x+3}{4}\right] = \frac{x-2}{3}$; b) $\left[\frac{x^2-3x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{3}$.

84. a) Fie $\varepsilon \geqslant 0$ şi $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale astfel încît $|a_1| \leqslant \varepsilon$, $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \varepsilon$, pentru $i = 1, 2, ..., n-1$. Să se arate că există un număr natural $k \leqslant n$, astfel încît

$$\left|a_k - \frac{1}{2}a_n\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

b) Să se deducă, de aici, că există un număr natural p, astfel încît

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=p+1}^{n} a_i\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|.$$

85. Fie a, b numere raţionale pozitive şi $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Să se găsească, presupunînd că există, numerele raţionale x şi y astfel încît

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

În ce condiţii astfel de numere există?
Aceeaşi problemă pentru egalitatea

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

86. Fie $a, b, c, m \in \mathbf{R}$ astfel încît $m > 0$, $ac < 0$ şi

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0.$$

Definim funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, prin $f(x)=ax^2+bx+c$.
Să se demonstreze că

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1)<0.$$

87. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a \neq b$. Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=|x-a|+|x-b|.$$

Generalizare.

88. Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, avem

a) $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$;

b) $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2.$

89. Să se arate că

$$\sqrt[3]{2} \notin \{p+q\sqrt{r} \mid p, q, r \in \mathbf{Q}\}.$$

90. Să se determine mulţimea

$$\{a \in \mathbf{Q} \mid \text{există } b \in \mathbf{Q} \text{ astfel încît } 5a^2-3a+16=b^2\}.$$

91. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3-[x]=3,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

92. Fie $s=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\ldots+\frac{1}{1\,000^2}$.

Să se arate că $|s-0{,}105|<0{,}006$.

93. Fie a un număr real care are o reprezentare zecimală de forma 0,999..., unde după virgulă sînt 100 de 9 consecutivi. Să se arate că $\sqrt{a}$ are o reprezentare zecimală în care după virgulă sînt, de asemenea, 100 de 9 consecutivi.

94. a) Fie $\alpha > \beta > 0$ numere reale. Să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \text{ şi } \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

este mai mare.

b) *Generalizare.* Dacă n este un număr natural să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}}{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n} \text{ şi } \frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n}$$

este mai mare.

95. Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}$, iar $p \in \mathbf{N}$ un număr prim. Să se arate că:

$$a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}=0 \text{ dacă şi numai dacă } a=b=c=0.$$

96. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a. Să se demonstreze că:

a) $[x]+[y] \leqslant [x+y]$;

b) $\left[\frac{[x]}{x}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$; $n \neq 0$ fiind un număr întreg;

c) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$;

d) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

97. Fie numărul $\frac{n^2+5}{2\,100}$, unde n este un număr par.

a) Să se arate că fracţia zecimală sub care se reprezintă acest număr raţional este mixtă.

b) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n pentru care acest număr se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale finite.

c) Dacă presupunem că n este astfel încît fracţia $\frac{n^2+5}{2\,100}$ este ireductibilă, să se determine numărul cifrelor din perioadă şi al celor care nu sînt în perioadă.

98. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n $(n \neq 0, -1, -2)$, numărul $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracţie periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{3n^2+6n+2}{n(n^2-1)}$ $(n \neq 0, \pm 1)$.

99. a) Fie a un număr raţional, dat de fracţia ireductibilă $\frac{m}{n}$, $(m, n)=1$, care se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică simplă. Să se arate că numărul k al cifrelor perioadei este cel mai mic număr natural astfel încît 10^k-1 să fie divizibil prin n.

b) Să se determine numitorii fracţiilor ireductibile care dau numere raţionale ce se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică simplă, a cărei perioadă să aibă 1, 2, 3 sau 4 cifre.

c) Dacă n şi n' sînt numitorii fracţiilor ireductibile, care dau numere raţionale, care se reprezintă sub formă de fracţii zecimale periodice simple avînd perioadele formate din k, respectiv k' cifre, să se arate că orice fracţie ireductibilă cu numitorul nn' dă un număr raţional care se reprezintă sub forma unei fracţii periodice simple. Mai mult, dacă n şi n' sînt prime între ele, numărul cifrelor din perioada fracţiei zecimale periodice care

reprezintă numărul rațional dat de o fracție ireductibilă de numitor nn' este c.m.m.m.c. al numerelor k și k'.

100. Să se determine numerele raționale care se reprezintă sub formă de fracții zecimale mixte, avînd o cifră la partea neperiodică și două cifre în perioadă.

101. Fie $\frac{m}{7}$ și $\frac{n}{13}$ fracții ireductibile și p, respectiv p', numerele date, de perioadele fracțiilor zecimale periodice sub care se reprezintă numerele raționale $\frac{m}{7}$ și $\frac{m}{13}$. Să se arate că $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$.

102. Fie $\frac{m}{n}$ o fracție ireductibilă care dă un număr rațional ce se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple cu perioada formată din $n - 1$ cifre; fie aceasta $(a_1a_2 \dots a_{n-1})$. Să se arate că orice altă fracție cu același numitor dă un număr rațional care se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă cu perioada de forma $(a_ia_{i+1} \dots \dots a_{n-1}\ a_1a_2 \dots a_{i-1})$, pentru un anumit i, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

103. a) Se dau numerele $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$, care au aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-p}. Să se arate că numărul $\frac{mk + m'k'}{nk + n'k'}$, în care k și k' sînt numere întregi, are aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decît 10^{-p}.

b) Cunoscînd resturile r și r' ale împărțirii lui $10^p \cdot m$ prin n și respectiv $10^p \cdot m'$ prin n', să se determine restul împărțirii lui $(mk + m'k') \cdot 10^p$ prin $nk + n'k'$.

Capitolul V

FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII

1. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul II:
a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$; b) $f(x) = -x^2 + 7x + 2$;
c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$; d) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}2x + 0{,}3$;
e) $f(x) = -0{,}4x^2 + x + 0{,}1$; f) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

2. Să se determine axa de simetrie și vîrful parabolei asociat funcțiilor:
a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; b) $f(x) = x^2 + x + 1$;
c) $f(x) = -x^2 + 3x - 12$; d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;
e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}1x + 0{,}4$; f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

3. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcții:
a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$; b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$;
c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$; d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$;
e) $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$; f) $f(x) = x^2 - 4$.

4. Să se stabilească semnul următoarelor funcții:
a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; d) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$;
b) $f(x) = -x^2 - 5x - 6$; e) $f(x) = -0{,}2x^2 + x - 0{,}8$;
c) $f(x) = x^2 + 3x + 13$; f) $f(x) = 0{,}4x^2 - 5x$.

5. Să se facă tabloul de variație și să se traseze graficul următoarelor funcții:
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$; c) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$;
d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; e) $f(x) = -x^2 + 25$; f) $f(x) = -x^2 + 10x$.

6. Să se traseze graficul funcțiilor:
a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$; b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = |-x^2 + 2x + 1|$;
c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = |x^2 - 5x| + 1$; d) $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k(x) = |2x^2 - 3x| - 1$.

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \in (-\infty, -2), \\ x^2, & x \in [-2, 2], \\ x + 2, & x \in (2, +\infty); \end{cases}$

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 16|$;
g) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min(x, x^2)$; h) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(x, x^2)$;
i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min(1, x, x^2)$; j) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(1, x, x^2)$;
k) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x, x^2)$; l) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leqslant 0; \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$

7. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|ax^2-3x+c|$.
Dacă $0<a<2$ şi $c<0$, să se determine a şi c astfel încît $f(0)=4$ şi $f(1)=6$.

8. Să se determine funcţia de gradul al doilea, $f(x)=ax^2+bx+c$ astfel încît graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(1,2)$, $B(-1,6)$, $C(2,3)$.

9. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$ astfel încît graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(-2, 20)$, $B(-1, 12)$ şi să taie axa Ox în punctul de coordonate $C(2, 0)$.

10. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$ astfel încît să aibă vîrful în punctul $V(4, -4)$ şi să taie axa Oy în punctul $A(0, 12)$.

11. Să se arate că următoarele funcţii sînt strict crescătoare:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă } x<0,\\ x^2+1, & \text{dacă } x\geqslant 0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\leqslant 1,\\ x^2-2x+2, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$

12. Să se arate că următoarele funcţii sînt strict descrescătoare:

a) $f(x)=\begin{cases} -2x+1, & \text{dacă } x\leqslant 0,\\ -x^2+1, & \text{dacă } x>0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & \text{dacă } x\leqslant 2,\\ -x^2+4x-2, & \text{dacă } x>2.\end{cases}$

13. Să se arate că funcţiile de la problemele **11** şi **12** sînt bijective şi să se determine inversele lor.

14. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$ ştiind că admite un maxim egal cu 9 şi trece prin punctele $A(1, -7)$ şi $B(-1, -27)$.

15. Să se determine parametrul $m\in\mathbf{R}$ astfel încît între rădăcinile ecuaţiilor următoare să existe relaţia scrisă în dreptul fiecăreia:

a) $(m+1)x^2+2mx+5=0$, $\quad x_1-x_2=2$;
b) $(m-2)x^2+(3m-5)x+3=0$, $\quad x_1=x_2$;
c) $(m+3)x^2+mx+m+1=0$, $\quad x_1=3x_2$;
d) $3x^2+(m-3)x+m+5=0$ $\quad x_1^2+x_2^2=\frac{8}{3}$;
e) $(m+5)x^2-(m+7)x-m+3=0$, $\quad x_1x_2=x_1+x_2$;
f) $mx^2-(m-1)x-m+1=0$, $\quad x_1^3+x_2^3=4$;
g) $mx^2+(m^2-2)x+2(m+1)=0$, $\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$;
h) $(m+2)x^2+(m-3)x+m=0$; $\quad x_1+x_2+2x_1x_2=\frac{3}{2}$;
i) $x^2+mx+2m+8=0$, $\quad x_1+2x_2$;
j) $x^2+2(3m+2)x+3(2m+1)=0$, $\quad x_1^2+x_2^2=\frac{10m}{3}x_1x_2$;
l) $x^2-(m+1)x+m=0$, $\quad |x_1-x_2|=1$.

16. Să se calculeze, în funcţie de $m\in\mathbf{R}$, expresiile:
a) x_1+x_2; b) x_1x_2; c) $x_1^2+x_2^2$; d) x_1-x_2; e) $x_1^3+x_2^3$; f) $x_1^4+x_2^4$; g) $x_1^5+x_2^5$; h) $x_1^{-1}+x_2^{-1}$; i) $x_1^{-2}+x_2^{-2}$ j) $x_1^{-3}+x_2^{-3}$ cu x_1, $x_2\neq 0$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2-mx+m+1=0$.

17. Să se calculeze, în funcţie de m, expresiile:
a) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$; b) $\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2-m^2x+m^2+1=0$.

18. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini:
a) $x_1=7$, $x_2=-7$; b) $x_1=0$, $x_2=-5$; c) $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=\frac{3}{5}$;
d) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{5}{7}$; e) $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$.

19. Se dă ecuaţia $2x^2+(m+1)x+5m-2=0$. Să se formeze ecuaţia în y ale cărei rădăcini îndeplinesc condiţiile:
a) $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$; b) $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$, $y_2=x_2+\frac{1}{x_2}$;
c) $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_1x_2$; d) $y_1=\frac{x_1+x_2}{x_1}$, $y_2=\frac{x_1+x_2}{x_2}$;
e) $y_1=\frac{x_1}{x_2}$, $y_2=\frac{x_2}{x_1}$; f) $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$; g) $y_1=x_1^3$, $y_2=x_2^3$;
h) $y_1=x_1^{-2}$, $y_2=x_2^{-2}$; i) $y_1=x_1^{-3}$, $y_2=x_2^{-3}$.

20. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $3x^2+5x+3>1$; b) $-2x^2+6x-3<5$; c) $6x^2+2x-3>0$;
d) $5x^2+3x+1>0$; e) $-8x^2+2x+6<0$; f) $7x^2+3x-4<0$;
g) $\frac{x^2+2x-2}{x^2-3x+4}>3$; h) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+7}>\frac{2}{3}$;
i) $|x^2-9|+|x^2-16|<47$; j) $\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-1}\right|>2$;
k) $\frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|}>1$; l) $\frac{2x+1}{2x^2+3x-2}<2$; m) $\left|\frac{3x-1}{x^2-7x+12}\right|<1$.

21. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} 7x^2+13x>2,\\ -5x^2+6x-1<0;\end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-1\leqslant 0,\\ 3x^2-7x+2\leqslant 0,\\ -x^2+2x-5<0;\end{cases}$

c) $\begin{cases} |3x^2-8x+4|+x-1<0,\\ x^2+3x+7>0;\end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x-1)\geqslant 4(x+1),\\ x^2+4x>0;\end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2}\leqslant 1,\\ \frac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2}\geqslant -1.\end{cases}$

22. Să se determine m astfel încît $x^2+y^2-4x-4y+m>0$, $(\forall)\ x, y\in\mathbf{R}$.

23. Să se determine m astfel încît $x^2+y^2-2x-y+m>0$, $(\forall)\ x, y\in\mathbf{R}$.

24. Să se rezolve inecuaţia $5x^2-20x+26\geqslant\frac{4}{x^2-4x+5}$.

25. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2x$. Să se calculeze:
a) $f([0,2])$; b) $f([-2,4])$; c) $f([1,6])$; d) $f([-10,0])$ (a se vedea ex. 28, cap. III).

26. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x)=x^2-4x+3$. Să se calculeze:
a) $f([-4,0])$; b) $f([1,6])$; c) $f([3,5])$;
d) $f([3,+\infty))$; e) $f((-\infty-, -1])$; f) $f((-\infty, 3])$.

27. Să se determine Im f (a se vedea ex. 28, cap. III) pentru următoarele funcţii:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 5x - 6$;
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$;
c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 4| + 3$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x + 1}$; e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3}$;

f) $f : \mathbf{R} - \{1, 3\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4x + 3}$,

g) $f : \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{a+b}{2}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - ab}{2x - a - b}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

28. Fie fracţia $E = \dfrac{x^2 + 2mx + 3m - 2}{x^2 + 2x + m}$. Să se determine m astfel încît fracţia E să aibă sens şi să fie pozitivă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

29. Fie fracţia $E = \dfrac{-x^2 + (m+1)x - \dfrac{1}{2}}{x^2 + 2mx + m - 1}$.

I) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, fracţia E are sens oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

II) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel încît E să fie negativă, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

30. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ $(a \in \mathbf{R})$. Să se determine valorile lui a, astfel încît Im $f \subset [-3, 2]$.

31. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$. Să se determine m şi n astfel încît Im $f = [-3,5]$.

32. Pentru ce valori ale lui a, între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2(a-1)x - 2a + 1 = 0$ există relaţia $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2} \geqslant \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$?

33. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are coeficientul lui x^2 egal cu 1, ştiind că discriminantul şi produsul rădăcinilor sale sînt, respectiv, $\Delta = -2m^2 + m + 1$, $p = \dfrac{3}{4}(2m^2 + m)$.

Să se determine m astfel încît rădăcinile x_1 şi x_2 să verifice inegalitatea $\dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} > m$.

34. Se dă ecuaţia $mx^2 - 2(m+1)x + 8 = 0$ şi se cere:

a) Să se discute rădăcinile ecuaţiei după valoarea parametrului m;

b) Să se determine m astfel încît să avem $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > x_1 + x_2$, x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

35. Se dau ecuaţiile: $x^2 - (m+1)x + m^2 = 0$ cu rădăcinile x_1 şi x_2 şi $y^2 - (m+3)y + 12m + 11 = 0$ cu rădăcinile y_1 şi y_2.

Să se determine m astfel ca între rădăcinile ecuaţiilor să avem

$$2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \leqslant x_1x_2 + y_1y_2.$$

36. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea

$$(1 + \alpha^2)x^2 - (1 + \alpha)x + \alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Să se determine parametrul α pentru care are loc inegalitatea

$$-1 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2} \leqslant 0.$$

37. Se dă ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$ şi se cere:

a) pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dublă celeilalte?

b) pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică inegalitatea $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1x_2$?

38. Considerăm funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x < -3, \\ -2x - 5, & x \geqslant -3 \end{cases}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 4, & x > 1. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$.

39. Considerăm funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leqslant 0, \\ -5x - 1, & x > 0 \end{cases}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$.

40. Considerăm funcţiile $f, g : (0,1) \to (0,1)$ definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x, & \text{dacă } \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } \dfrac{1}{4} < x < 1. \end{cases}$$

Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$.

41. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1, \quad m \neq 0.$$

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe dreapta $x + y = 0$;

II) Ce porţiune din această dreaptă cuprinde vîrful parabolelor cu ramurile în sus (respectiv în jos)?

42. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 + 2(m-1)x + m - 1.$$

Pentru ce valori ale lui m parabolele asociate funcţiilor f_m au vîrful deasupra axei Ox?

43. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + m - 2,$$

unde m este un parametru real.

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă.

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola asociată funcţiei f_m are vîrful sub axa Ox?

44. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, parabola asociată funcţiei de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$ taie axa Ox în două puncte distincte.

45. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m, \text{ unde } m \in \mathbf{R}.$$

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă;

II) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se găsesc sub dreapta $y = +\frac{5}{4}$.

46. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1$, $m \neq 0$.

Să se determine m astfel încît vîrful parabolei asociate acestei funcţii să se găsească pe prima bisectoare.

47. Să se determine m astfel încît parabola asociată funcţiei $f(x) = x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să taie axa Ox în două puncte.

48. Să se arate că oricare ar fi $m \neq 0$, graficul funcţiei de gradul al doilea $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + m - 6$ taie axa Ox în două puncte distincte.

49. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + 1, \; m \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că există două parabole asociate acestor funcţii care sînt tangente axei Ox. Să se arate apoi că aceste două parabole au vîrfurile simetrice faţă de origine.

50. Să se determine m astfel încît graficele funcţiilor $f(x) = x^2 - 2x - 4$ şi $g(x) = x^2 - 2mx - 6$ să aibă acelaşi vîrf.

51. Să se arate că graficele funcţiilor $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ şi $g(x) = x^2 + 2x - 1$ au două puncte comune.

52. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să notăm cu S aria cuprinsă între axa Ox şi graficul acestei funcţii. Să se arate că $1 < S < 2$.

53. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît graficele funcţiilor $f(x) = x^2 + mx + 1$ şi $g(x) = x^2 + x + m$ să se intersecteze pe axa Ox.

54. Fie p un număr prim. Să se arate că intersecţia graficului funcţiei $f(x) = x^2 - 3x - p$ cu axa Ox, este formată din două puncte care nu au coordonate raţionale.

55. Fie funcţia $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Notăm cu S aria cuprinsă între graficul acestei funcţii şi axa Ox. Să se arate că $10 < S < 16$.

56. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - (m+3)x + 4m$. Pentru ce valori ale lui m graficul lui f_m este situat deasupra dreptei $y = -7$?

57. Fie $m \in \mathbf{Z}$. Să se determine m astfel încît vîrful parabolei funcţiei $f(x) = mx^2 - 2(m+7)x + m$ să aibă coordonatele numere întregi.

58. Fie funcţia de gradul al doilea

$$f_m(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m + 1, \; (m \neq 1).$$

Să se determine m astfel încît graficul funcţiei f_m să fie situat sub axa Ox.

59. Considerăm funcţia $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m(m-3)$.

I) Pentru ce valori ale lui m vîrful parabolei funcţiei f_m se află sub axa Ox?

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola funcţiei f_m este tangentă axei Ox?

III) Să se arate că vîrfurile parabolelor funcţiilor f_m, cînd $m \in \mathbf{R}$, se află pe o dreaptă.

60. Fie funcţia $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m+2)x + m + 3$.

I) Să se arate că graficul acestei funcţii taie axa Ox în două puncte distincte.

II) Să se determine m astfel încît rădăcinile ecuaţiei

$$(m+1)x^2 + 2(m+2)x + m + 3 = 0 \text{ să fie mai mici decît } 1.$$

61. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2 + mx + m + 1 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

62. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2 + 2mx + m + 1 > 0$, oricare ar fi $x > 0$?

63. Pentru ce valori ale lui m, $x^2 - 2mx + m + 1 > 0$, $(\forall)$ $x > 0$?

64. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2 + 2mx + 1 > 0$, $(\forall)$ $x > 0$?

65. Pentru ce valori ale lui m, $(m+1)x^2 + 2mx + 1 < 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$?

66. Pentru ce valori ale lui m, $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 2 > 0$, oricare ar fi $x > 0$?

67. Pentru ce valori ale lui m, $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 2 < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

68. Pentru ce valori ale lui m, inecuaţia $(m-1)x^2 + (m+1)x + m + 1 > 0$ nu are nici o soluţie?

69. Să se determine numerele m şi n astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 - (3m-4)x - 6(m-1) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid (n-1)x^2 - (n-1)x + 6(n-2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

70. Să se determine numerele m şi n astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - (3m-7)x - 6(m-2) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid nx^2 + nx + 3(2n-2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

71. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^2 + mx - 22 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m+4)x + 14 = 0\} \neq \emptyset,$$

72. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (3m+1)x^2 + (3m+2)x + 2m + 5 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (2m+5)x^2 + (3m+2)x + 3m + 1 = 0\}$$

să aibă 3 elemente.

73. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0\}$$

să aibă exact două elemente.

74. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) \neq \emptyset.$$

75. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulţimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap [1, +\infty)$ să aibă două elemente.

76. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) = \emptyset.$$

77. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulţimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap (-\infty, -1]$ să aibă două elemente.

78. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] \neq \emptyset.$$

79. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] = \emptyset.$$

80. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $0 < a < b$. Dacă $b < m < \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$, atunci mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2m(m-a)x + m^2(m^2 - b^2) = 0\} \cap [0, +\infty)$ are două elemente.

81. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + b^2c^2 = 0\} \neq \emptyset$.

82. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0\} \cap [2, +\infty)$$

să aibă un singur element.

83. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m^2 - 1)x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0\} \cap (-\infty, 1]$$

să aibă un singur element.

84. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\} \cap [-1, 1] \neq \emptyset.$$

85. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m+2)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\} \cap [-1, 1]$$

să aibă două elemente.

86. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0\} \cap [-1, 1]$$

să aibă un singur element.

87. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m+1)x^2 - 2(m-1)x - m = 0\} \cap [0, 1] = \emptyset.$$

88. Fie numerele reale a, b, c, a', b', c' astfel încît $a \neq 0, a' \neq 0$ şi $ac \geqslant 0$. Dacă $\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\} \neq \emptyset$ şi $\{x \in \mathbf{R} \mid a'x^2 + b'x + c = 0\} \neq \emptyset$ atunci $\{x \in \mathbf{R} \mid aa'x^2 + bb'x + cc' = 0\} \neq \emptyset$.

89. Să se determine m astfel încît mulţimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap (-\infty, 1]$ să aibă două elemente.

90. Să se determine m astfel încît mulţimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0\} \cap (0,3)$ să aibă două elemente.

91. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap [0,1] = \emptyset.$$

92. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m + 5 = 0\} \cap [5,7] \neq \emptyset.$$

93. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 2y; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x^2 + xy + y = -1. \end{cases}$

94. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 7y^2 = 15, \\ -x^2 + 3xy = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 2y^2 = -1, \\ x^2 + 5y^2 = 21; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5, \\ xy = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 118, \\ x^2 - xy - y^2 = -41; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = p, \\ x^2y + xy^2 + y^3 = q; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{16}; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + z = -2, \\ xy + xz + yz = 2; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$ k) $\begin{cases} xy + xz = -8, \\ xy + yz = 1, \\ yz + xz = -3. \end{cases}$

95. Pentru ce valori ale lui a, sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a, \end{cases}$ are o unică soluţie reală?

96. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încît $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2xy - z^2 = 1. \end{cases}$

97. Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, următoarele sisteme simetrice:

a) $\begin{cases} 2x + xy + 2y = 59, \\ 3x - 2xy + 3y = -34; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 2xy = -11, \\ 2x^2y + 2xy^2 = -12; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = \dfrac{133}{1\,000}, \\ x + y = \dfrac{7}{10}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy + 5(x + y) = 55, \\ 6xy + 3(x + y) = 81; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y), \\ x^3 + y^3 = x + y; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 3, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = 0, \\ xyz = 0. \end{cases}$

98. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^3y^2z^4 = 1, \\ x^2y^4z^4 = 2, \\ x^2y^3z^5 = 3. \end{cases}$

99. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \dots = \dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = b^p. \end{cases}$

100. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} | 2x + y | = 3, \\ \left| \dfrac{4x - 1}{2x + y} \right| + \left| \dfrac{2x + y}{3x - 2} \right| = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} | x - 2 | + | y - 1 | = 1, \\ | x^2 - 3x + 2 | + 4y = 6. \end{cases}$

101. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x_2x_3 \dots x_n}{x_1} = a_1, \\ \dfrac{x_1x_3 \dots x_n}{x_2} = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1x_2 \dots x_{n-1}}{x_n} = a_n. \end{cases}$

102. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încît

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2^2\sqrt{x_2 - 2^2} + \dots + n^2\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

103. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geqslant 2$) numere reale pozitive. Să se rezolve

sistemul $\begin{cases} x_1x_2 = a_1, \\ x_2x_3 = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}x_n = a_{n-1}, \\ x_nx_1 = a_n. \end{cases}$

104. Pe o dreaptă (Δ) se consideră $|AB| = a$ şi pe segmentul $|AB|$ punctul M. Triunghiurile echilaterale avînd ca baze date $|AM|$ şi $|MB|$, să se găsească minimul ariei sumei celor două triunghiuri.

105. Fie AD mediana unui triunghi oarecare ABC. Să se determine $M \in |AD|$ astfel încît $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ să fie minimă.

106. Se dau două surse de lumină A şi B de intensitate respectiv 100 A şi 81 A. Să se determine pe dreapta AB un punct M egal luminat de ambele surse. Distanţa dintre A şi B este egală cu 20 m.

107. Se dă un cerc de rază $R = 10$ m. Pe un diametru $|AB|$ al cercului se alege un punct M şi se construiesc cercurile de diametre $|AM|$ şi $|MB|$. Să se determine poziţia punctului M astfel ca aria cuprinsă între cele două cercuri să fie maximă.

108. Să se determine pe un segment $AB = 20$ cm un punct M astfel ca suma ariilor cercurilor construite pe AM şi BM ca diametri să fie minimă.

109. Să se împrejmuiască un loc în formă de dreptunghi cu un gard a cărui lungime este de 120 m. Cît trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încît aria locului să fie maximă?

110. Din bucăţi de materiale triunghiulare o croitoreasă vrea să coasă feţe de masă dreptunghiulare. Cum trebuie croite feţele de masă astfel încît să se piardă cît mai puţin material?

111. Aria unui dreptunghi este egală cu 81 dm². Să se afle dimensiunile astfel încît perimetrul să fie minim.

112. Două maşini pot transporta o cantitate de materiale timp de 5 zile. Prima maşină merge 200 km pe zi şi consumă 12 litri la suta de kilometri. A doua merge 300 km pe zi şi consumă 18 litri la suta de kilometri. Cîte zile trebuie să transporte materiale fiecare maşină astfel încît cantitatea de benzină consumată să fie minimă?

113. Fie triunghiul ABC în care se cunoaşte latura $|AB| = 5$ cm, iar suma laturilor $|BC|$ şi $|AC|$ este egală cu 7 cm. Să se afle înălţimea triunghiului astfel ca aria să fie maximă.

114. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu acelaşi perimetru, să se găsească acelea care au raza cercului înscris maximă.

Capitolul VI

PUTERI ŞI RADICALI

1. Să se calculeze:

a) $\left[7-5\left(\frac{6}{13}\right)^{0}\right]^{-1}$; b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-2}$;

c) $\dfrac{3^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{0}-18\cdot 3^{-3}}$; d) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

2. Să se efectueze:

a) $\dfrac{4x^{-2}-9y^{-2}}{a-b}\cdot\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{2x^{-1}+3y^{-1}}$; b) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{x^{-1}+y^{-1}}\cdot\dfrac{x+y}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-3}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{-2}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{2}$; d) $[a-(1-a)^{-1}]^{-1}\left[\dfrac{a(a-2)+a^{0}}{a^{2}-a+1}\right]^{-1}$;

e) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}(a^{2}-2ab+b^{2})^{-2}$.

3. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-a^{-1}}{4-\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}}:\left[\dfrac{1}{2^{-2}(2+a)}-2a^{-1}-1\right]$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{3}$;

b) $\left\{a+\left[1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{4}$.

4. Să se efectueze

$$(x+y+z)^{5}-(-x+y+z)^{5}-(x-y+z)^{5}-(x+y-z)^{5},$$

unde x, y, z sînt numere reale.

5. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$(a+b)^{5}-a^{5}-b^{5}=5ab(a+b)(a^{2}+ab+b^{2}).$$

6. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $a+b \neq 0$, să se demonstreze că $a^{3}-b^{3}=$ $=\left(a\,\dfrac{a^{3}-2b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}+\left(b\,\dfrac{2a^{3}-b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}$.

7. I) Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3}-3(bcd+cda+dab+abc)=$$
$$=(a+b+c+d)(a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}-ab-ac-ad-bc-bd-cd).$$

II) *Generalizare.* Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{3}-3\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} a_i a_j a_k=\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2}-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_i a_j\right).$$

8. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ şi notăm $\alpha=a+b+c+d$, $\beta=a+b-c-d$, $\gamma=a-b+c-d$, $\delta=a-b-c+d$. Să se calculeze

$$\alpha\beta(\alpha^{2}+\beta^{2})-\gamma\delta(\gamma^{2}+\delta^{2}).$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încît $a+b+c+d=0$, atunci

$$(a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3})^{2}=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

10. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0 \text{ şi } a_1^{3}+a_2^{3}+a_3^{3}+a_4^{3}+a_5^{3}+a_6^{3}=0.$$

Să se arate că

$$(a_1+a_3)(a_1+a_4)(a_1+a_5)(a_1+a_6)=(a_2+a_3)(a_2+a_4)(a_2+a_5)(a_2+a_6).$$

11. Să se afle care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{4}$ sau $\left(-\dfrac{1}{32}\right)^{3}$; b) $\left(-\dfrac{6}{7}\right)^{4}$ sau $\left(\dfrac{36}{49}\right)^{6}$; c) $81^{150}\cdot 8^{200}$ sau $3^{600}\cdot 16^{75}$;

d) 3^{65} sau $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-65}$; e) $81^{-75}\cdot 8^{200}$ sau $3^{-600}\cdot 4^{150}$.

12. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=3x^{2}$; b) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_2(x)=x^{3}-2$;

c) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_3(x)=(x-2)^{2}$; d) $f_4:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_4(x)=(x+1)^{4}$;

e) $f_5:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_5(x)=|x+1|^{3}$; f) $f_6:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_6(x)=|x+2|^{3}$.

13. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei putere $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{n}$.

14. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=x^{-2}+1$;

b) $f_2:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f_2(x)=x^{-3}+1$;

c) $f_3:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

d) $f_4:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f_4(x)=\dfrac{1}{(x+1)^{2}}$.

15. Să se aducă la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{(2+x)^{2}}$; b) $\sqrt[4]{(|x|-3)^{4}}$;

c) $\sqrt{(-2x^{2}+3x-1)^{2}}$; d) $\sqrt[4]{(|x|^{2}-3x+2)^{4}}$.

16. Să se efectueze sumele:

a) $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$; b) $\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$;

c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}+\sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

17. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_1(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$;

b) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_2(x)=\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$;

c) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_3(x)=\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}+\sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

18. Să se găsească valorile lui x pentru care sînt definiţi radicalii sau sumele de radicali:

a) $\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt[6]{1-4x}$; c) $\sqrt{-5-3x}$; d) $\sqrt[3]{7x-2}$; e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4}$; f) $\sqrt{(x^2-3x+2)^2}$; g) $\sqrt[4]{x^2-5x+4}$; h) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-x^5)\,x^8}$; i) $\sqrt{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)}$; j) $\sqrt{x-4}-\sqrt{x-5}$; k) $\sqrt[5]{7x^2-3}+\sqrt[6]{x^2-2}$; l) $\sqrt{4+x}-\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{15-x}$; m) $3\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{|x+2|-7}$.

19. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $3\sqrt{2}$ sau $\sqrt{27}$; b) $3\sqrt[4]{m^3}$ sau $\sqrt[4]{162\,m^3}$ $(m>0)$; c) $2a\sqrt{a}$ sau $\sqrt{4a^3}$ $(a>0)$; d) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ sau $\sqrt{\frac{3}{2}}$; e) $\sqrt{\frac{4}{75}}$ sau $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; f) $-3\sqrt[3]{54}$ sau $-2\sqrt[3]{128}$; g) $2\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ sau $\sqrt[3]{\frac{8}{375}}$.

20. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{6},\ \sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt{8},\ \sqrt[4]{54};\ \sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[12]{75}$.

21. Să se determine semnul fiecăruia dintre numerele:

$$\sqrt{2}-\sqrt[3]{3};\ \sqrt[6]{4}-\sqrt[4]{3};\ \sqrt[3]{31}-\sqrt{10};\ \sqrt[4]{63}-2\sqrt{2};\ \sqrt[6]{m}-\sqrt[3]{n},$$

m şi n fiind numere reale pozitive.

22. Să se determine care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ sau $\sqrt{19}-\sqrt{11}$; b) $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ sau $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$.

23. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\,(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

24. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

25. Să se scrie numărul $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ sub forma $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, cu a şi b numere raţionale.

26. Fără a utiliza formula radicalilor compuşi (a se vedea soluţia ex. 85, cap. IV), să se transforme radicalul $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ într-o sumă de doi radicali.

27. Dacă a, b, c sînt numere reale, astfel încît $a+b+c=1$, atunci

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 5.$$

28. Să se simplifice:

a) $\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$;

b) $\dfrac{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}+16}{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}-16}$;

c) $\dfrac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}}$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$. Discuţie.

29. Să se demonstreze că, dacă $a>b>0$ sînt numere reale şi $m\in\mathbf{N}$, atunci

$$ma^{m-1}>\frac{a^m-b^m}{a-b}>mb^{m-1}.$$

Să se deducă de aici că

$\sqrt[n]{n+1}>\sqrt[n+1]{n+2}$, $n\geqslant 2$ fiind un număr natural.

30. Utilizînd formula radicalilor compuşi (a se vedea soluţia ex. 85, cap. IV) să se aducă la o formă mai simplă radicalii:

a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$; c) $\sqrt{28-16\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

f) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

31. Să se arate că

$$\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}\in\mathbf{Q}.$$

32. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

33. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}.$

34. Să se demonstreze că

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

35. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}\in \mathbf{Q}.$$

36. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$;

b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$;

c) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1$.

37. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$;

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; d) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

38. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{3}}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$; h) $\dfrac{1}{9\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}-27}$

39. Să se raționalizeze numitorul fracției

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}},$$

a, b, c fiind numere raționale.

40. Să se raționalizeze numitorul fracției

$$\frac{1}{a+b\sqrt[3]{k}+c\sqrt[3]{k^2}}$$

unde a, b, c, k sînt numere întregi.

41. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

I) $\dfrac{1}{a-\sqrt[n]{b}}$; II) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$, a fiind un număr întreg.

42. Să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}},$$

unde $x\in(1,2)$.

43. Fie $f_1(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$,

$$f_2(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}},$$

unde $x\geqslant\dfrac{1}{2}$.

a) Să se simplifice $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$;

b) Să se rezolve ecuația $f_1(x)+f_2(x)=2\sqrt{2}$.

44. Să se arate că ecuația

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt[3]{x^2+7}-2$$

are unica soluție $x=-1$.

45. Să se găsească soluțiile reale ale ecuațiilor:

a) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-8-6\sqrt{x-1}}=1$;

b) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=5$.

46. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x+9}+x+8=0$; b) $\sqrt{24-10x}=3-4x$;

c) $1-\sqrt{13+3x^2}=2x$;

d) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}}=x-1$; e) $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$;

f) $\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}=2x-1$; g) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{4}$.

47. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x},$$

a fiind un număr real.

48. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x,$$

inde $a\in\mathbf{R}$. Discuție.

49. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$; b) $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;

c) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-8x+7}=0$.

50. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x^2 - a} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

unde $a \in \mathbf{R}$.

51. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = \sqrt{4x + c},$$

a, b, c fiind numere reale.

52. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x - 6 + 2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+16}$; c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x - 9 + 4\sqrt{6}}$.

53. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sqrt{x + 8a} + \sqrt{x} = \sqrt{4x + 8a + 4},$$

a fiind un număr real.

54. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sqrt{x + a} - \sqrt{x + b} = c,$$

a, b, c fiind numere reale.

55. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$; b) $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-13} = \sqrt{11 + \sqrt{72}}$.

56. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{a'x + b'} = \sqrt{ax + c} + \sqrt{a'x + c'},$$

unde a, a', b, b', c, c' sînt numere reale, astfel încît $b + b' = c + c'$.

57. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = a\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}, \text{ unde } a \in \mathbf{R}.$$

58. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt[n]{a + x}}{x} + \frac{\sqrt[n]{a + x}}{a} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

unde a și b sînt numere reale, iar n este un număr natural. Discuție.

59. I) Să se demonstreze că orice soluție a ecuației

$$\sqrt[3]{E(x)} + \sqrt[3]{F(x)} = \sqrt[3]{G(x)} \qquad (1)$$

este o soluție a ecuației

$$(E(x) + F(x) - G(x))^3 + 27\, E(x)F(x)G(x) = 0. \qquad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluție a ecuației (2) este o soluție a ecuației (1), mai puțin aceea care dă pentru $E(x), F(x), -G(x)$ valori numerice egale.

60. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{b},$$

unde a, b sînt numere reale. Discuție.

61. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{x + a} + \sqrt[3]{x + b} + \sqrt[3]{x + c} = 0,$$

unde a, b, c sînt numere reale. Discuție.

62. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{(2 - x)^2} + \sqrt[3]{(7 + x)^2} = \sqrt[3]{(7 + x)(2 - x)} + 3$;

b) $\sqrt[3]{(x - 2)^2} + \sqrt[3]{(4 - x)^2} = \sqrt[3]{(x - 2)(4 - x)} + 1$;

c) $\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{2x + 2} + \sqrt[3]{3x + 2} = 0$;

d) $\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x + 6} = \sqrt[3]{2x + 11}$.

63. I) Să se demonstreze că orice soluție a ecuației

$$E(x) + F(x)\sqrt[3]{H(x)} + G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2} = 0 \qquad (1)$$

este soluție a ecuației

$$(E(x))^3 + (F(x))^3 H(x) + (G(x))^3 (H(x))^2 - 3\, E(x)F(x)G(x)H(x) = 0. \qquad (2)$$

II) Recipróc, să se demonstreze că orice soluție a ecuației (2) este o soluție a ecuației (1), mai puțin aceea care dă pentru $E(x)$, $F(x)\sqrt[3]{H(x)}$, $G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2}$ valori numerice egale.

64. Să se rezolve ecuația

$$3x + 1 + \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{(x + 1)^2} = 0.$$

65. I) Fie a, b, c numere reale nenule și notăm:

$$\alpha = ab + ac - bc, \quad \beta = bc + ba - ca, \quad \gamma = ca + cb - ab.$$

Să se arate că sînt echivalente următoarele două propoziții:

1) $abc \geqslant 0$ și α, β, γ sînt de același semn;

2) $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$.

II) Cu notațiile de mai înainte, să se rezolve ecuația

$$x = \sqrt{b - x}\,\sqrt{c - x} + \sqrt{c - x}\,\sqrt{a - x} + \sqrt{a - x}\,\sqrt{b - x}.$$

Să se arate că pentru ca ecuația să aibă soluție diferită de a, b, c este necesar și suficient ca să fie îndeplinită una din condițiile echivalente precedente.

66. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}},$$

a fiind un număr real.

67. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x} + 3} + \sqrt[3]{13 - \sqrt{x}} = 4$; b) $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} = 1$;

c) $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x - 4} = 2$; d) $\dfrac{\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 18}}{\sqrt[3]{x + 18} - \sqrt[3]{x - 1}} = 5$.

68. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x + 1)$;

b) $(x - 2)^2 + 4(x - 2) + \sqrt{x}(4 - \sqrt{x}) = 0$;

c) $(x - 4)^2 + 4x - 27 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

69. Să se rezolve ecuația

$$3\,\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}} = 10\,\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}.$$

70. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 3$; b) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$;

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

d) $\sqrt{x^4 - 18x^2 + 81} - 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2} + x + 7 = 0$.

71. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c} + d = 0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și $d > 0$.

72. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{\sqrt{3x^2 + 4x - 4}}$;

c) $\frac{x-8}{\sqrt{3x-4}} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{x+3}$;

d) $\sqrt{2x+4} - \sqrt{8-4x} = \frac{12x-8}{\sqrt{6x+20}}$;

e) $\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2x+6} - \frac{9}{4}} = x + 1$.

73. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} + \sqrt{x-5} + \sqrt[4]{4-x} = 7$;

b) $\sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[4]{6-x} = 2$.

74. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$; b) $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{4-x} = 2$;

c) $\sqrt[4]{x-9} - \sqrt[3]{x+2} = -1$; d) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{3-x} = 1$.

75. Să se rezolve ecuația

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6} - (x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x} - \sqrt[5]{x-6}} = 30.$$

76. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[5]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2$;

b) $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = 2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}$;

c) $\sqrt[7]{1 + \frac{x}{a}} + \sqrt[7]{\frac{a+x}{b}} = \sqrt[7]{\frac{x}{ab}}$;

d) $\frac{2x+1}{2x-1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{2x-1}} + \frac{2x-1}{2x+1}\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} + 1 = 0$;

e) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{b}$; f) $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$,

a, b, c fiind numere reale.

77. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2 - 1}$;

b) $\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{(1-x+x^2)^2} = \sqrt[n]{1+x^3}$;

c) $\sqrt[m]{(x+a)^2} + 2\sqrt[m]{(a-x)^2} = 3\sqrt[m]{a^2 - x^2}$;

d) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{1-x}$;

e) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{1 - \sqrt[3]{x^2}}$;

f) $\sqrt[n]{1 + \sqrt[p]{x}} - 2\sqrt[n]{1 - \sqrt[p]{x}} = \sqrt[2n]{1 - \sqrt[p]{x^2}}$.

78. Să se rezolve inecuația

$$\sqrt{x^2 - a^2} > x - \sqrt{2ax - a^2},$$

a fiind un număr real.

79. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$; b) $2\sqrt{x(x+7)} < 29 - 2x$;

c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$; d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 6} > x - 2$.

80. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$; b) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

c) $\frac{\sqrt{24 - 2x - x^2}}{x} < 1$; d) $\sqrt{2 - \sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

81. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{x-1} + x - 3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$;

b) $\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x+1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x+1)^2}{8}}$;

c) $\sqrt{x+7} - 1 < \sqrt{-x-5} + \sqrt{(x+7)(-x-5)}$;

d) $\frac{2\sqrt{x+1}}{1 - 2\sqrt{3-x}} < 1$; e) $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$ (pentru $x \geqslant 2$);

f) $\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6x - 3$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2.$

82. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2^{1/2}+2\cdot 5^{-1}}{2^{-1/3}-2^{-1/6}5^{-1/3}+5^{-2/3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$;

b) $\dfrac{2^{7/3}-2^{8/3}\cdot 2^{2/3}+2\sqrt[3]{3^4}}{2^{5/3}-\sqrt[3]{48}-2\cdot 3^{2/3}+3\cdot 2^{2/3}} : \sqrt[3]{2}.$

83. Să se efectueze:

I) $\dfrac{2b^{1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}} + (a-b)^{-1}\left[\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a^{1/2}+b^{1/2}} - \sqrt{ab}\right]$, pentru $a, b > 0$,

II) $\left\{(1-a^2)\left[\dfrac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}} + a^{1/2}\right]\left[\dfrac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}} - a^{1/2}\right]^{-1} + 1\right\} : \sqrt{(1-2a+a^2)^{-1}}$,

pentru $a > 1$;

III) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}} + \dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right) : \sqrt[3]{a}$, pentru $a, b > 0$, numere reale.

84. Să se efectueze:

I) $\dfrac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d} + \dfrac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d} - a^4c^2\sqrt{\dfrac{3d}{a^4c^2}}$, unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive; aceeași problemă, dacă a, b, c, d, cu $d \geqslant 0$, sînt numere reale oarecare;

II) $\dfrac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^7}{c^2}} : \left(\dfrac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\dfrac{a^4b^7}{cd^5}}\right)$, unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive.

85. Să se calculeze:

I) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(a^2-ab)^{2/3}} : \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[6]{a^2(a^{3/2}+b^{3/2})}}$, pentru $a = \dfrac{6}{5}$, $b = \dfrac{3}{5}$;

II) $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1-\sqrt[16]{a})$, pentru $a = 2$;

III) $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-1/2}+1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right]^{-1/2} + \left[\dfrac{(1-x^2)^{-1/2}-1}{(1-x^2)^{-1/2}+1}\right]^{-1/2}$

pentru $x = 2a^{1/2}(1+a)^{-1}$, $a > 1$;

IV) $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, pentru $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, unde $a, b > 0$.

Aceeași problemă pentru cazul în care $a, b < 0$.

86. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă și adaos, cu eroarea indicată, pentru numerele:

a) $\sqrt[3]{72351}$ cu o eroare mai mică decît 1;

b) $\sqrt{2{,}5}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-1};

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-3}.

87. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1};$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

88. Dacă $s = \dfrac{1}{\sqrt{10\,000}} + \dfrac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dfrac{1}{\sqrt{10\,002}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$, să se arate că $|s - 1800| < 0{,}02$.

89. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right];$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

90. Să se determine toate valorile posibile ale expresiei

$$\sqrt{a^2+a+1} - \sqrt{a^2-a+1},$$

pentru $a \in \mathbf{R}$.

91. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[3]{x-y+8}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{-1/2} = 2, \\ xy = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x+y) + \sqrt{x^2+xy+4x} = 52; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 4xy + 6x = 8; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 5, \\ x + 20y = 23. \end{cases}$

Capitolul VII

NUMERE COMPLEXE

1. Să se găsească numerele reale x și y dacă:

a) $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$; b) $(2+i)x-(2-i)y=x-y+2i$; c) $(4-3i)x^2+(3+2i)xy=4y^2-\frac{1}{2}x^2+(3xy-2y^2)i$; d) $\frac{x-3}{3+i}+\frac{y-3}{3-i}=i$; e) $3\sqrt{x^2-2y}+(1-i)x^2=2(1+2i)y+4-19i$; f) $(x-a)(x+a-2+2i)+(y-b)(y+b-i)=0$.

2. Să se calculeze:

a) $(2-i)^2$; $(2+i)^2$; $(2-i)^3$; $(2+i)^3$; b) $(2-4i)(5+2i)$; $(4+5i)(1-2i)$; $(3-\sqrt{2}i)^2(3+\sqrt{2}i)$; c) $\frac{i-6}{2+5i}$; $\frac{1+i}{3-i}+\frac{3-i}{1+i}$: $\frac{i-6}{2+5i}+\frac{2-i}{2+i}$; $\frac{3+7i}{2+3i}+\frac{5-8i}{2-3i}$; d) $\frac{(1+i)^2}{1-i}+\frac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

3. Să se arate că $1+3i$ și $1-3i$ sînt soluții ale ecuației

$$x^3-x^2+8x+10=0.$$

4. Să se arate că numerele complexe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sînt soluții ale ecuației $x^4+x^2+1=0$.

5. Dacă ε este oricare dintre numerele $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze:

a) $\varepsilon^2+\varepsilon+1$, ε^n, unde $n\in\mathbf{N}$; b) $\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}+\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$; $\frac{\varepsilon^3-1}{1-\varepsilon^2}$;
c) $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)$; $(a\varepsilon+b\varepsilon^2)(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, unde $a, b\in\mathbf{R}$.
d) $(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$, unde $a, b, c\in\mathbf{R}$.

6. Să se verifice egalitățile:

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2$; b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5=-1$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6+\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6=-2$.

7. Fie numerele complexe

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \quad \text{și} \quad z_2=\frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}.$$

Să se calculeze:

$$z_1+z_2,\ z_1z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ z_1^2+z_2^2,\ z_1^3+z_2^3,\ z_1^4+z_2^4,\ z_2^5z_1^{-3}.$$

8. Să se determine numerele complexe z, astfel încît numărul $(z-1)\cdot(\bar{z}+i)$ să fie real.

9. Să se aducă la forma algebrică simplă, numerele:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; b) $\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2$; c) $\frac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$.

10. Să se calculeze:

a) $(1+i)^{200}$; b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$; c) $\left(\frac{5-17i}{11-6i}\right)^n+\left(\frac{5+13i}{9+4i}\right)^n$; d) $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7-6i}\right)^n$, unde $n\in\mathbf{N}$.

11. Dacă α și β sînt rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$, să se calculeze: a) $\alpha^{1980}+\beta^{1980}$; b) $\alpha^{1981}+\beta^{1981}$; c) $\alpha^{1982}+\beta^{1982}$; d) $(1+\alpha)^{1980}+(1+\beta)^{1980}$.

12. Dacă α, β sînt rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$, să se calculeze. a) $\alpha^n+\beta^n$, b) $(1+\alpha)^n+(1+\alpha^2)^n+(\alpha+\alpha^2)^n$; c) $(1+\beta)^n+(1+\beta^2)^n+(\beta+\beta^2)^n$, unde n este un număr natural.

13. Să se calculeze

$$s_1=\sum_{k=0}^{n} i^k,\quad s_2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k i^k, \text{ unde } n \text{ este un număr natural.}$$

14. Să se demonstreze că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, avem

$$(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbf{R}.$$

15. Să se calculeze $|z|$ dacă

$$z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4.$$

16. Să se determine, în fiecare caz în parte, numărul complex z astfel încît:

a) $\left|\frac{z-12}{zi+8}\right|=\frac{5}{3}$ și $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$; b) $|z|=|1-z|=|\bar{z}^2|$; c) $|z-i|=|z-1|=|z+iz|$.

17. Fie $z, z'\in\mathbf{C}$ astfel încît $|z|=|z'|=1$. Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbf{R}$.

18. Fie $\lambda\in\mathbf{R}$. Să se arate că modulul numărului $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex de modul 1 poate fi scris în mod unic sub forma precedentă.

19. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $z_1=(z+3i)(3-5i)$; b) $z_2=\frac{3+2i}{1+3i}$.

20. Să se determine punctele din planul complex, care au ca afix numerele complexe z, pentru care:

a) $|z+i|\leqslant 2$; b) $|z-2i|>3$; c) $|z|\leqslant 2$; d) $1<|2z+3-2i|<3$; e) $|i-z|>4$; f) $|z-2|-|z+2|<2$; g) $|z+1|<|1-z|$.

21. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 - 1 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$; c) $64x^3 + 1 = 0$; d) $64x^3 - 27 = 0$; e) $x^4 + 16 = 0$; f) $x^4 - 81 = 0$; g) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$; h) $x^6 - 27x^3 + 27 = 0$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{C}$ are loc egalitatea:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Să se dea o interpretare în planul complex acestei relații.

23. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Mai mult, să se arate că are loc egalitatea dacă și numai dacă există un număr real pozitiv λ astfel încît $z' = \lambda z$.

24. Să se arate că dacă $z \in \mathbf{C}$, cu $|z| < \frac{1}{3}$, atunci

$$|(\sqrt{2} - i)\, z^3 - iz| < \frac{3}{4}.$$

25. a) Fie $m \in \mathbf{Q}$. Să se arate că, dacă $z = (4m^2 - 1) + 4mi$ atunci $|z| \in \mathbf{Q}$.

b) Să se determine toate numerele complexe $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, al căror modul să fie număr întreg.

26. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că numărul

$$z = (\sqrt[4]{a} + i\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + i^2\sqrt[4]{b}) \dots (\sqrt[4]{a} + i^{4k}\sqrt[4]{b})$$

este real.

Dacă P este planul complex, să se determine următoarele mulțimi:

27. $A = \{(x, y) \in P \mid |z - 2i| = 6$, unde $z = x + iy\}$.

28. $B = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z - 2}{z - 6}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z - 2}{z - 6}\right)\right.$, unde $z = x + iy\}$.

29. $C = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \frac{1 + \bar{z}}{z} \in \mathbf{R}\right.$, unde $z = x + iy\}$.

30. $D = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z - 2}{z - 1}\right) = 0\right.$, unde $z = x + iy\}$.

31. $E = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\frac{z - 2}{z - 4i}\right) = 0\right.$, unde $z = x + iy\}$.

32. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale și distincte, atunci ecuația $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ are rădăcini complexe.

33. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația $(2a + 1)x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ să aibă rădăcini complexe.

34. Să se descompună în produs de polinoame de gradul întîi polinoamele: $x^4 + x$, $x^3 - 1$, $x^4 + 16$.

35. Să se determine numerele complexe z, astfel încît

a) $|z| - 2z = 3 - 4i$; b) $|z| + z = 3 + 4i$.

36. Fie $u \in \mathbf{R}$, $u \neq 1$. Să se găsească condiții în care produsul

$$(1 + ui)\,(1 + ui^2)\,(1 + ui^3) \dots (1 + ui^n),\ n \in \mathbf{N}.$$

să fie:

a) real; b) imaginar.

37. Fie numărul $\alpha = (u + iv)^n + (v + iu)^n$, unde $u, v \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$. Să se determine n astfel încît numărul α să fie:

a) real; b) imaginar.

38. Să se găsească relația dintre x și y astfel încît numărul $(x + iy^2)^3$, să fie:

a) real; b) imaginar.

39. Să se găsească condiția în care numărul $(x + iy)^3$ este:

a) un număr real mai mare decît 64;

b) un număr imaginar cu modulul mai mare decît 64.

40. Fie $u, v \in \mathbf{C}$ astfel încît

$$|u| < 1 \text{ și } |v| = 1 \text{ și fie } w = v\frac{z - u}{1 - \bar{u}z}.$$

Să se arate că $|w| \leqslant 1$ dacă și numai dacă $|z| \leqslant 1$.

41. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $z \in \mathbf{C}$, astfel încît $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

42. Să se determine numerele complexe z astfel încît

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

43. Să se determine mulțimea punctelor din plan de afix z astfel încît imaginile în plan ale numerelor z, z^2, z^3 să fie vîrfurile unui triunghi dreptunghic.

44. Fie $a \in \mathbf{C}$ și $z = \frac{a + i}{a - 1 + 2i}$. Să se determine mulțimea punctelor A din planul complex de afix a, astfel încît z să fie real.

45. Fie funcția $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin

$$f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}.$$

Să se determine mulțimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $f(z) \in \mathbf{R}$.

46. Fie funcția $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Să se determine:

a) Mulțimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$.

b) Mulțimea B a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\mathrm{Re}\, f(z) = 0$.

47. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $2z + 6i = \frac{1}{2i} z + 5i - 7$; b) $(1 + 3i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = (3 - 2i)z + 5$;

c) $(\sqrt{3} + i)\, z + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{21}{4} iz + 3$; d) $(5 + 3i)\bar{z} + \frac{2}{1 - i} = (\varepsilon + \varepsilon^2)^2$,

unde $\varepsilon = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

48. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$ astfel încît $z^2 = a + bi$.

Aplicație, pentru numerele: $1 - i$, $1 + i$, $5 - 12i$, $5 + 12i$, $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$.

49. Să se arate că pentru ecuația de gradul al doilea $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, cu coeficienți complecși, rădăcinile sînt date de aceeași formulă ca și în cazul ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.

50. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$; b) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$; c) $z^2 - 2z - 7 - 6i = 0$; d) $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 = 0$; e) $z^2 - (5 + 2i)z + 3(3 + i) = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $iz^2 - 2(1 + i)z + 3(2 + i) = 0$; b) $(1 + i)z^2 - (5 + 2i)z + 5 = 0$; c) $(4 + 3i)z^2 + 2(2 - i)z + 2 - i = 0$; d) $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.

52. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $z^2 - 2(1 + i\alpha^2)z + 1 - \alpha^4 = 0$;
b) $z^2 - 2z + 1 + \alpha^2 = 0$,

α fiind un parametru real.

53. Să se rezolve ecuația $\bar{z} = z^3$.

54. Să se simplifice fracțiile:

a) $\dfrac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^4 + 1}$; b) $\dfrac{X^2 - iX - (1 + i)}{X^2 - 2X + 2}$; c) $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X - 5}{X^3 - 5X^2 - 9X - 5}$;

d) $\dfrac{X^2 - 2aX + a^2 + b^2}{iX^2 - iaX + b(a + bi)}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

55. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^6 - y^3 = 98, \\ x^4 + x^2y + y^2 = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^5 + y^6 = -16, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^4 = -19, \\ xy^2 = -6. \end{cases}$

56. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} (1 + 3i)x - 2(1 - 2i)y + 2(3 - i) = 0, \\ 2(2 + i)x - (2 + 3i)y - (5 + 4i) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 + 3i)x + (2 - 3i)y = 7, \\ (1 + i)x + (1 - i)y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + (3 - 2i)y = -1 + i, \\ (3 + 2)x + 3y = 2 + i. \end{cases}$

Capitolul VIII

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. Fie a un număr real pozitiv. Să se decidă care dintre perechile de numere următoare este mai mare:

a) $a^{1+\sqrt{6}}$ și $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ și $a^{\sqrt{3}-2}$.

2. Să se găsească valorile lui x, pentru care sînt definiți radicalii:

a) $\sqrt{(0,2)^x - 25}$; b) $\sqrt[4]{5^x - 0,04}$; c) $\sqrt[3]{3^{-4x} - \sqrt{3}}$; d) $\sqrt{a^x - a^{-x}}$,

a fiind un număr real pozitiv.

3. Fie funcțiile:

a) $f_1 : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $f_2 : (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$

c) $f_3 : [3, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \sqrt{3^x - 27}$;

d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{3^{|x|}}$;

e) $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_5(x) = 2^{2x} - 2^{x+3} + 18$.

Să se determine imaginea fiecărei funcții.

4. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care sînt adevărate inegalitățile:

a) $5^{(x-3)^2-|x-3|-2} < 1$; b) $(2\sqrt{2})^{x+3} > \left(\dfrac{1}{8}\right)^{|x-4|}$ c) $\dfrac{2^x - 4}{3x^2 - 8x + 5} > 0$;

d) $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

5. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 3^{|x|}$;

b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = 3^x + 3^{-x}$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3}$.

6. Să se găsească valorile lui x, pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_a|x|$; b) $\log_a(5 - x^2)$; c) $\log_a(x^4 - 5x^2 + 4)$; d) $\log_a\sqrt[3]{x^2 - x - 6}$;
e) $\log_a(\log_a x)$; f) $\log_a(\log_b x)$,

unde a și b sînt numere reale pozitive, diferite de 1.

7. Fie a și b numere reale pozitive, diferite de 1. Să se decidă care dintre numerele $\log_a b$ și $\log_b a$ este mai mare.

8. Să se determine valorile lui x, pentru care au loc inegalitățile:

a) $\log_a x \leqslant 3\log_a x$; b) $\log_x |x| \geqslant 3\log_a |x|$.

9. Pornind de la graficul funcției logaritmice să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f_1 : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \log_3(x-1)$;

b) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = |\log_3 x|$;

c) $f_3 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \log_3 |x|$;

d) $f_4 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = \log_3 x^2$;

e) $f_5 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_5(x) = \log_3 \sqrt{x}$;

f) $f_6 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_6(x) = \log_3 \dfrac{x}{3}$.

10. Să se determine x astfel încît să avem

a) $\log_a x = \dfrac{2}{3}\left[\log_a m + \dfrac{3}{4}\log_a(m+n) - 2\log_a(m-n)\right] - \dfrac{1}{2}\log_a n$;

b) $\log_a x = -\dfrac{1}{3}\log_a u + \dfrac{1}{4}\left[\log_a v - \dfrac{2}{3}\log_a u + \dfrac{2}{3}\log_a(u+v) - \right.$
$\left. - \dfrac{1}{2}\log_a(u-v)\right]$.

11. Să se demonstreze că, dacă $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$, atunci $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

12. Să se calculeze $\log_6 16$ în funcție de $a = \log_{12} 27$.

13. Dacă $a = \log_{30} 3$ și $b = \log_{30} 5$, să se calculeze în funcție de a și b numărul $\log_{30} 16$.

14. Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a \dfrac{2ab}{a+b} + \log_b \dfrac{2ab}{a+b} \geqslant 2$.

15. Să se demonstreze că:

$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x} + \dfrac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} x}}$$

16. Să se demonstreze că

$$\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}.$$

17. Dacă $2\log_a(x-2y) = \log_a x + \log_a y$, să se calculeze $\dfrac{x}{y}$.

18. Dacă $\log_{60} 3 = m$ și $\log_{60} 5 = n$, să se calculeze în funcție de m și n, numărul $\log_5 4 + \log_{12} 2$.

19. Să se demonstreze că numerele: $\log_2 3$, $\log_5 10$, $\log_{1/2} 5$ sînt iraționale.

20. Fie a și b numere raționale pozitive, diferite de 1. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca $\log_a b$ să fie un număr rațional.

21. Să se demonstreze că dacă numerele reale a și b sînt astfel încît $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, atunci are loc inegalitatea

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

22. Fie funcția $f : [1, 64] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

Să se determine valoarea lui x, pentru care f să aibă valoarea maximă.

23. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geqslant n.$$

24. Să se demonstreze că

$$\log_{a_3}\sqrt[n]{a_1 a_2} + \log_{a_4}\sqrt[n]{a_2 a_3} + \ldots + \log_{a_1}\sqrt[n]{a_{n-1} a_n} + \log_{a_2}\sqrt[n]{a_n a_1} \geqslant 2.$$

25. Să se decidă care dintre numerele $\log_2 3$ și $\log_3 4$ este mai mare.

26. Dacă $\log_{bc} a = x$, $\log_{ca} b = y$ și $\log_{ab} c = z$, să se arate că

$$a^{(x+1)(y-z)} b^{(y+1)(z-x)} c^{(z+1)(x-y)} = 1.$$

27. Să se demonstreze că

$$\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geqslant \frac{3}{2},$$

unde $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, +\infty)$.

28. Să se arate că

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

29. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left(\dfrac{5}{22}\right)^{2x-3} = (4,4)^{3x-2}$; b) $(a^{x^2+x-2})^{3-x} = 1$ $(a > 0)$;

c) $8\sqrt{(0,25)^{5-x/2}} = 2^{\sqrt{x-1}}$; d) $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$;

e) $2^{1-x^2} \cdot 2^{2x} = 64^{-1}$; f) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x-1}\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{2}{(\sqrt[4]{3})^{3x-4}}$;

g) $4^{|x^2-3x+2|} = 16^{x+1}$; h) $27 \cdot 3^{|x-2|} \cdot 9^{1/2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$.

30. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^{x+1} + 3^x = 108$; b) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} + 32 = 0$; c) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$; d) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 120$.

31. Să se rezolve ecuațiile:

a) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155$; b) $2 \cdot 7^{2x+2} + 7^{2x-1} = 687$; c) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 1$; d) $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} = 315$; e) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} = 896$; f) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 30$.

32. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$; b) $3^{x+1} + 5^{x+2} = 3^{x+5} - 3 \cdot 5^{x+3}$; c) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}$; d) $7^{2x-1} + 7^{2x} + 7^{2x+1} = 5^{2x-1} + 5^{2x} + 5^{2x+1}$.

33. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$; b) $2^x + 4^x = 272$; c) $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$; d) $64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0$; e) $3 \cdot 3^{x+2} + 9 = \sqrt{81^{2x-1}} + 3^{4x}$.

34. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^{4\sqrt{x}} + 2 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3 = 0$; b) $25^{\sqrt{x-3}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-3}} - 500 = 0$;

c) $3^{2\sqrt[4]{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + 3 = 0$.

35. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + \dfrac{16}{3^x - 1} = \dfrac{1}{3^{x-3}}$; b) $a^{x-2} + a^{2-x} = 2 \quad (a > 0)$;

c) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$; d) $\sqrt{3^x} + \sqrt{3^{-x}} = 10$.

36. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$; b) $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 98$;

c) $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 2$.

37. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^{2x} - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0$; b) $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$;

c) $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x = 0$; d) $2^{2x+2} \cdot 10^{x+1} - 10 \cdot 2^{3x}5^x = 1\,200$;

e) $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

38. Să se rezolve ecuațiile:

a) $9^{\sqrt{x^2+3}} - 3^{1+\sqrt{x^2+3}} = 54$; b) $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} = 2$.

39. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\frac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2 \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Să se afle valorile lui a pentru care ecuația are o soluție întreagă.

40. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$3^x + 4^x = y^2$$

în mulțimea numerelor întregi.

41. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$; b) $3^x + 4^x = 5^x$;

c) $(x + 4)3^{1-x-1} - x = (x + 1)\,|\,3^x - 1\,| + 3^{x+1} + 1$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = 2^{\sqrt{x-3}}$; e) $(2 + a)^{\sqrt{x-4}} + (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 2$, unde $|\,a\,| \leqslant 1$.

42. Să se determine valorile reale ale lui x, astfel încît să fie satisfăcute inecuațiile:

a) $|\,x\,|^{2x^2-3x+1} \leqslant 1$; b) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3^x + 1}{9^x + 3} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

43. Fie funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x$.

Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ și crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

44. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_x(3x^2 - 5x) = 1$; b) $\log_{x+1}(3x^2 + 2x - 3) = 2$; c) $\log_{x^2-1} 27 = 3$;

d) $\log_{\sqrt{x-1}}(2x^2 + 2x + 5) = 4$; e) $\log_{\sqrt{x^2+2}}(2x^4 + x^2 + 6) = 4$;

f) $\log_{\sqrt{x}}(x + |\,x - 2\,|) = \log_x(5x - 6 + 5\,|\,x - 2\,|)$.

45. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_a \log_a \log_a x = 0$; b) $\log_a \log_{a^2} \log_{a^3} x = 0$; c) $\log_a \log_b \log_c x = 0$;

d) $\lg(x + 6) - 2 = \dfrac{1}{2} \lg(2x - 3) - \lg 25$; e) $\log_{x^2} \log_{2x^2} = \log_{4x^2}$;

f) $\log_a(a \log_b(b \log_c x) = 1$.

46. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\dfrac{\log_a(x - 3)}{\log_a(x^2 - 3)} = \dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{\log_{x+2} \sqrt[3]{x^2 + 2}}{\log_{x+2}(2x - 1)} = \dfrac{1}{3}$;

c) $(\sqrt[3]{x})^{\log_x x^2+2} = 2 \log_3 27$; d) $\dfrac{1}{2} \lg \sqrt{x^3 - 3a^4} = \lg x + \lg \dfrac{a}{x}$;

e) $\lg \sqrt{1 + x} + 3 \lg \sqrt{1 - x} = \lg \sqrt{1 - x^2} - 2$;

f) $\log_{x^2-6x+8} [\log_{2x^2-2x+3} (x^2 + 2x)] = 0$.

47. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_{15} \dfrac{1}{3^x + x - 5} = x(\log_{15} 5 - 1)$; b) $\lg(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$;

c) $\lg(x^2 - 3x - 4) - x = \lg(x + 1) - 5$; d) $\lg(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}) = \lg(10^{x+1} - 2) - 1$;

e) $(x - 1)(1 - \log_6 3) = \log_6(2^{x-1} + x - 2)$; f) $\log_x(2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$;

g) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

48. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\lg^2 x - 4 \lg x + 3 = 0$; b) $\dfrac{1}{4} \lg^4 x - 3 \lg^2 x + 8 = 0$;

c) $4 \lg^4 x - 5 \lg^2 (x^2) + 16 = 0$; d) $(4 \lg^2 (x + 1) - 1)(\lg^2 (x + 1)^2 + 1) = 15$;

e) $2 \sqrt[3]{2 \log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$;

f) $\log_x \sqrt[3]{4} + 3 \log_x (x \sqrt[3]{2}) + \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 12$.

49. Să se rezolve ecuația

$$\log_a^m x^n - \log_a^n x^m = 0,$$

unde m și n sînt numere naturale.

50. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^x = x$; b) $x^{\log_3 x + 4} = 243$; c) $(\sqrt[4]{x})^{\lg x + 7} = 10^{\lg x + 1}$; d) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$;

e) $7^{\log_{25}^2(5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0$; f) $x^{\log_2 x} + 5x^{-\log_2 x} = 6$;

g) $|x - 1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = (x - 1)^2$; h) $6^{\log_{\sqrt{3}} x} - 7 \cdot 6^{\log_3 x} + 6 = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2 x + \log_3 x = 1$; b) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} \dfrac{3}{2} + 1$;

c) $\log_{a^2} x + \log_a x^2 = 1$; d) $\log_2^2 (x - 2)^2 - \log_{1/2} (x - 2) = 5$;

e) $\log_5 2 + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{8}$; f) $\log_{x+2} x + \log_x (x + 2) = \dfrac{5}{2}$.

52. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\log_a x}{\log_b x \log_c x} = \frac{\log_a b}{1 + \log_c a}.$$

53. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + 2^x + \log_2 x = 7$; b) $2^x + \log_2 x + 3^{x/2} + \log_3 \frac{x}{2} = 8.$

54. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a;$

b) $\log_a x + (a + \log_a x) \log_{\sqrt{x}} a = 2a \log_x a;$

c) $6 \log_x a + 3 \log_{a^2 x} a - \frac{14 \log_{ax} a}{\log_a x} = 0.$

55. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 243, \\ 2^{3y-x} = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 15, \\ \sqrt{2^x} - 3^y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{y^2-3y+3} = x, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250, \\ 2^y \cdot 5^x = 40; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y, \end{cases}$ $\begin{pmatrix} a > 0, & a \neq 1 \\ b > 0, & b \neq 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = b, \\ a^{x+y} = c; \end{cases}$ $(a, b, c > 0)$

i) $\begin{cases} x^{y-2} + x^{2-y} = \frac{5}{2}, \\ x^y + x^{-y} = \frac{65}{8}; \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y-2}} = 36, \\ 9^{\sqrt[3]{x}}\, x + 4^{\sqrt[4]{y-2}} = 97; \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1, \\ 2^y = 8 \cdot 2^x; \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^m = y^n, \end{cases}$ $(m \neq n)$; m) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y + 2^z = 124, \\ 3^y \cdot 2^z + 2^x = 436, \\ 2^z \cdot 2^x + 3^y = 91. \end{cases}$

56. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3, \\ x^2 + 16y^2 = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x - 21 \lg y = 1, \\ x^2 y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2(y - x) = \log_4(y - 2xy), \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = 0, \\ 2 \log_2 x + \log_2 y = 3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^a = y^b, \\ \log_c \frac{x}{y} = \log_y x, \end{cases}$ $(a, b, c > 0, c \neq 1)$;

h) $\begin{cases} |x|^{\lg y} = 4, \\ xy = 40; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5^{\lg x} - 3^{\lg y} = 0, \\ (3x)^{\lg 3} - (5y)^{\lg 5} = 0; \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x - y \log_x y = (x + y) \log_x y; \end{cases}$

k) $\begin{cases} \log_m x + \log_n y = a, \\ \log_n x + \log_m y = b; \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log_x y + \log_{3x} y^2 = 4, \\ \log_y x + \log_{3y} x^2 = \frac{7}{6}; \end{cases}$

m) $\begin{cases} (\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 = 2m, \\ x^{\log_a x} + y^{\log_a y} = 2 \cdot \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} a^m, \end{cases}$ $(p \neq q)$; n) $\begin{cases} (xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} = a, \\ (yz)^{\lg x} + (yx)^{\lg z} = b, \\ (zx)^{\lg y} + (zy)^{\lg x} = c. \end{cases}$

57. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\log_{1/2}(x^2 + 2x) > 0$; b) $\log_a(6x^2 + 5x + 1) < 0$;

c) $\log_x \frac{4x + 5}{6 - 5x} < 1$; d) $\log_a(3x^2 - 5x - 3) < \log_a(4x - 3)$;

e) $x \log_a 4 < \log_a(2^x + 6)$; f) $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7$;

g) $\log_{x^2}\left(\frac{4x - 5}{|x - 2|}\right) \geqslant \frac{1}{2}$; h) $\log_{\frac{x^2 - 10x + 31}{30}}\left(5x - \frac{11}{20}\right) \leqslant 0$;

i) $\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$; j) $\log_3(3^x - 3) \cdot \log_{1/3}(3^{x+1} - 9) < -6$;

k) $\log_2 \log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) \leqslant 1$; l) $\log_2\left(\left|\frac{x - 1}{x - 5}\right| + 7\right) > 3$;

m) $\log_x(x + 2) > \log_{x+2} x$; n) $\frac{\ln(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 3x} \geqslant 0.$

58. Să se determine valorile lui x, pentru care sînt definiți radicalii următori:

a) $\sqrt{|\ln^3 x + \ln x + |\ln x|| - |\ln^3 x - \ln x + |\ln x||}$; b) $\sqrt{\log_a x + \log_{ax} x}.$

59. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2 + 3) \geqslant 1$$

este adevărată pentru orice x real.

60. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2 + 2|a|) > 0$$

este adevărată pentru orice x real.

61. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît inegalitatea

$$m \cdot 4^x + 4(m - 1) \cdot 2^x + m > 1$$

să fie adevărată pentru orice x real.

62. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît inegalitatea

$$(m + 1)e^{-2x} + m(e^{-x} + 1) > 0$$

să fie adevărată pentru orice x real.

63. Fie a, b, c numere reale distincte și presupunem că α, β, γ sînt numere reale astfel încît pentru orice număr real x,

$$\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx} = 0.$$

Să se arate că $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX
INDUCŢIA MATEMATICĂ

1. Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n > 1$, sînt adevărate propoziţiile:

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

d) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, unde $x \neq 1$.

2. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze, prin inducţie matematică, că formulele găsite sînt adevărate pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$;

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$.

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, este adevărată egalitatea

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \dots k(k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{k+1},$$

unde $k \geq 2$ este un număr natural.

4. Să se calculeze sumele următoare şi apoi, să se demonstreze prin inducţie matematică formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

5. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze, prin inducţie matematică, formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

b) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

d) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

e) $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$, unde $k \geq 1$ este un număr natural.

6. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, sînt adevărate egalităţile:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

b) $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$.

7. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze prin inducţie matematică formulele găsite:

a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$;

b) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$;

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$;

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$;

e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$;

f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

8. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

pentru orice număr natural n.

9. Să se demonstreze că, pentru orice $n \geq 1$ număr natural, avem

$$\log_x \sqrt{a} + \log_{x^2} \sqrt[3]{a} + \log_{x^3} \sqrt[4]{a} + \dots + \log_{x^{n+1}} \sqrt[n]{a} = \log_x \sqrt[n+1]{a^n},$$

10. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, au loc identităţile:

a) $\cos\alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$;

b) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$;

c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$;

d) $\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$;

e) $\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos (n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$.

11. Să se determine toate numerele întregi x astfel încît

$$3x + 1 < 2 \log_2 (x + 4).$$

12. Să se determine numerele naturale n pentru care este îndeplinită inegalitatea

$$2^n > n^2.$$

13. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

14. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, au loc inegalitățile

$$\sqrt{n} < 2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

15. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, avem

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

16. Fie a, b numere reale cu $a + b > 0$, $a \neq b$. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, avem

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geqslant (a + b)^n.$$

17. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geqslant 1 + \frac{k}{n}$, pentru orice număr natural k;

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, pentru orice număr natural $k \leqslant n$.

Să se deducă de aici, că pentru orice număr natural n, avem

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

18. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 6$, avem:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

19. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 2$ și numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, avem

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(vezi ex. **26**, III, cap. IV).

20. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, avem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

21. Să se demonstreze că suma cuburilor oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 9.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $n^5 - n$ se divide cu 30.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, următoarele propoziții sînt adevărate:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133; b) $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9; c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ se divide cu 17; d) $6^{10n+1} + 15^{11n-1}$ se divide cu 31.

24. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 4^{4n+1}$ se divide cu 23.

25. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, avem:

a) $2^n > n$; b) $2^{n+2} > 2n + 5$.

26. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 3$, avem:

a) $2^n > 2n + 1$; b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

27. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 4$, avem $3^n > n^3$. Să se deducă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geqslant 4$.

28. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, avem

$$|\sin nx| \leqslant n |\sin x|.$$

29. Să se demonstreze că

$$\{k \mid k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 8\} = \{3p + 5q \mid,\ p, q \in \mathbf{N},\ 3p + 5q \geqslant 8\}.$$

30. Să se demonstreze că oricare ar fi n drepte diferite situate în același plan și care sînt concurente, împart planul în $2n$ părți.

31. Să se demonstreze că oricare ar fi n plane, care trec prin același punct, astfel încît oricare trei dintre ele nu au o dreaptă comună, împart spațiul în $n(n-1) + 2$ părți.

32. Să se demonstreze că n drepte situate într-un plan, astfel încît oricare două dintre ele nu sînt paralele și oricare trei nu sînt concurente, împart planul în $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ părți.

33. Să se demonstreze că n plane astfel incit:

I) oricare două dintre plane nu sint paralele;

II) oricare trei dintre plane nu trec printr-o aceeaşi dreaptă;

III) oricare patru nu trec prin acelaşi punct;

IV) oricare două drepte de intersecţie ale planelor date nu sint paralele,

împart spaţiul în $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{7}$ părţi.

34. Să se demonstreze că n cercuri, situate într-un plan, împart planul în cel mult $n^2 - n + 2$ părţi. Dar, dacă cercurile sint două cîte două secante?

35. Fie n pătrate arbitrare, unde n este un număr natural oarecare. Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părţi, astfel încît din părţile obţinute să se poată construi un nou pătrat.

36. (Teorema lui Euler.) Fie s numărul ţărilor unei hărţi arbitrare, l numărul frontierelor ei şi p numărul vîrfurilor. Să se arate că

$$s + p = l + 2.$$

37. Dacă p este numărul vîrfurilor, l numărul muchiilor şi s numărul feţelor unui poliedru convex, să se arate că

$$s + p = l + 2.$$

38. Să se demonstreze că n sfere, astfel încît oricare două să se intersecteze între ele, şi oricare trei nu au un cerc comun, împart spaţiul în $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$ părţi.

Capitolul X

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$; b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$; b) $\frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000$.

3. Să se afle pentru cîte valori ale lui $n \geqslant 2$, natural, au loc inegalităţile:

a) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306$; b) $\frac{(2n)!}{n!} < 1000$.

4. În cîte moduri se pot aşeza cinci copii pe o bancă?

5. a) Popescu, Ionescu, Georgescu, Vasilescu, Stătescu trebuie să vorbească la o întrunire. În cîte moduri se poate face ordinea înscrierilor la cuvînt în aşa fel încît Ionescu să nu vorbească înaintea lui Popescu?

b) Aceeaşi problemă cu condiţia ca Popescu să ia cuvîntul de fiecare dată imediat înaintea lui Ionescu.

6. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele posibile de cîte şase cifre, astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle:

a) Cîte astfel de numere se pot obţine?

b) Cîte numere încep cu cifra 1?

c) Cîte numere se termină în cifra 1?

d) Cîte numere încep cu 10?

e) Cîte numere nu încep cu 10?

7. Cîte variante de coliere se pot realiza din şapte mărgele de dimensiuni diferite, încît fiecare colier să conţină toate cele şapte mărgele?

8. În cîte moduri se pot aşeza, pe o tablă de şah, opt turnuri astfel încît nici unul dintre ele să nu poată lua pe celălalt?

9. Fie date n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se găsească numărul permutărilor acestora, astfel încît $a_1, a_2, \ldots, a_k$ să nu ocupe k locuri la rînd?

10. În cîte moduri se poate ordona mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît fiecare număr divizibil cu 2, şi fiecare număr divizibil cu 3, să aibă rangul divizibil cu 2 şi respectiv 3?

11. Să se calculeze

a) $\dfrac{A_n^5 + A_n^7}{A_n^6}$; b) $\dfrac{A_n^{n-1} - P_n}{C_n^{n-2}}$; c) $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}$;

d) $\dfrac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}}$; e) $\dfrac{A_n^2 \cdot P_k - 2P_{k+1}}{P_{k+1}}$; f) $\dfrac{A_{n+k}^{n-k+2} + A_{n+k}^{n-k+1}}{A_{n+k}^{n-k}}$;

g) $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$; h) $\dfrac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$.

12. Să se rezolve ecuațiile în n:

a) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; b) $P_{n-3} \cdot A_n^3 = 20P_{n-2}$; c) $A_7^n = mA_7^{n-1}$;
d) $P_{n+2} = 182A_n^{11} \cdot P_{n-11}$; e) $A_{n+1}^{k+1} \cdot P_{n-k} = 90P_{n-1}$.

13. În cîte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziție pînză de steag de cinci culori diferite?

14. Cîte dicționare sînt necesare pentru a traduce direct din una în alta din următoarele șase limbi: română, rusă, engleză, franceză, germană, italiană?

15. Cinci creioane de diferite culori se împart la 9 copii de vîrste diferite, fiecare copil primind cel mult un creion. În cîte moduri se poate face aceasta? Dar dacă copilul mai mic va primi neapărat un creion?

16. Cîte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

17. În plan sînt date n puncte, oricare trei dintre ele necoliniare. Cîte linii poligonale (închise și neînchise) cu k segmente se pot duce cu vîrfurile în punctele date?

18. Să se calculeze:

a) $\dfrac{C_{n+k}^k \cdot P_k - A_{n+k}^k}{P_k}$; b) $\dfrac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}}$.

19. Să se calculeze C_n^7 dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

20. Să se afle n, dacă:

a) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; b) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$; c) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$; d) $C_{n+2}^4 = n^2 - 1$;
e) $C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4$; f) $C_{7n}^{n^2+10} = C_{28}^2$; g) $C_{n-2}^2 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^2 = 19$;
h) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 55$; i) $30C_{n-3}^{n-9} = 19A_{n-4}^4$.

21. Să se rezolve inecuațiile:

a) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$; b) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$; c) $C_{15}^{k-2} > C_{15}^k$; d) $5C_n^3 > C_{n+2}^4$.

22. Să se determine valorile lui n, întregi pentru care numărul

$$C_{5n+4}^{n^2+3n-4}.$$

este definit.

23. Un elev are nouă cărți de matematică, iar altul are 7 cărți. În cîte moduri pot să schimbe cărțile între ei, o carte în schimbul alteia? Dar dacă schimbă cîte două cărți în schimbul altora două?

24. Pentru un joc de agrement, cinci fete și trei băieți trebuie să formeze două echipe de cîte patru. În cîte moduri se pot forma echipele?
Dar dacă în fiecare echipă trebuie să fie neapărat un singur băiat?

25. Pentru întocmirea orarului unei clase de elevi, trebuie să fie programată în fiecare zi, fie o oră de desen din cele două pe săptămînă, fie o oră de fizică din cele patru pe săptămînă. În cîte moduri se poate face această programare?

26. Cîte numere de cîte cinci cifre se pot forma astfel încît în fiecare număr fiecare cifră să fie mai mare decît precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decît precedenta?

27. Dintr-o grupă de 15 copii, dintre care 9 băieți și 6 fete, trebuie să fie formată o echipă de 7 copii, în care să intre cel puțin 3 fete. În cîte moduri se poate forma această echipă?

28. La o serată dansantă participă 7 fete și 8 băieți. La un anumit dans trebuie să se formeze 4 perechi. În cîte moduri se pot forma cele patru perechi?

29. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y, \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} = 8A_{2y}^{3x-1}, \\ 9C_{2y}^{3x} = 8C_{2y}^{3x-1}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3}, \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} xC_{n-1}^k + \dfrac{n}{k}y = \dfrac{k+1}{n}, \\ xC_{n+1}^k - \dfrac{n}{k+1}y = \dfrac{k}{n}. \end{cases}$

30. Să se arate că:

a) $\dfrac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \ldots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \ldots + C_{2n-1}^n} = 2$; b) $\dfrac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n$.

c) $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$.

31. Să se calculeze:

a) $C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2$; b) $(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + \ldots + (C_n^2)^2$.

32. Să se arate că dacă N_r este suma tuturor produselor de r factori luați dintre numerele 1, 2, ..., n, atunci

$$1 + N_1 + N_2 + \ldots + N_{n-1} = n \cdot n!.$$

33. Fie M o mulțime cu n elemente. Să se calculeze:

a) $\operatorname{card}\{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cup Y = M\}$;
b) $\operatorname{card}\{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cap Y = \emptyset\}$.

34. Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k!(2n-k)! = \frac{(2n+1)!}{n+1},$$

unde n și k sînt numere naturale cu $k \leqslant 2n$.

35. Dacă $S_k = 1!(1 + 1^2) + 2!(1 + 2^2) + \ldots + k!(1 + k^2)$, să se arate că

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)S_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)S_2 + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)S_n = (n+2)! - 2.$$

36. Să se dezvolte, după formula lui Newton, binoamele la putere:
a) $(x + a)^7$; b) $(x^2 - 2y)^6$; c) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^7$; d) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^6$;
e) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2}{y}}\right)^5$; f) $(a + \sqrt{a^2 - 1})^6 + (a - \sqrt{a^2 - 1})^6$;
g) $(1 + \sqrt{a})^7 - (1 - \sqrt{a})^7$; h) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5$.

37. Să se determine:
a) termenul al optulea al dezvoltării $(2x + a)^{10}$;
b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^9$;
c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{14}$;
d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^{13}$.

38. Să se determine:
a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + \sqrt{a})^{14}$ care îl conține pe x^6;
b) termenul din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})^{15}$ care îl conține pe y^2;
c) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{a}}\right)^{22}$ care conține pe $\frac{1}{a^2}$;
d) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ care nu conține pe a;
e) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{20}$ în care nu apare x.

39 Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{34}$ în care x și y au puteri egale.

40. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(a + x)^n$ coeficientul lui x^5 este egal cu coeficientul lui x^{10}.

41. Să se determine n, dacă coeficientul binomial al termenului de rang trei, al dezvoltării $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{a}}\right)^n$, este egal cu 190.

42, Să se determine n, dacă suma coeficienților termenilor, care au rangul doi, trei și respectiv patru, ai dezvoltării $(x^{-1} - \sqrt{x})^n$ este egală cu 41.

43. În dezvoltarea $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este 121. Să se găsească termenul în care nu apare x.

44. Să se găsească termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^n$, dacă coeficientul termenului al treilea este 28.

45. Să se determine x, dacă termenul al treilea al dezvoltării $(x + x^{\lg x})^5$ este 10^6, logaritmul fiind în baza 10.

46. Să se determine m, natural, astfel încît al zecelea termen al dezvoltării $(5 + m)^m$ să fie cel mai mare.

47. Să se determine n și x dacă, în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienților primilor trei termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este 420.

48. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{1 + \lg x}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, logaritmul fiind în baza 10. Să se afle x, știind că al patrulea termen al dezvoltării este egal cu 200.

49. Să se determine termenul care conține pe $x^{2/3}$ în dezvoltarea $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali este egală cu 128.

50. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 256. Să se găsească termenul care conține pe $\frac{1}{a}$.

51. Să se găsească termenii raționali ai dezvoltărilor următoare:
a) $(\sqrt[5]{2} - \sqrt[7]{3})^{24}$; b) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^{10}$.

52. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + \sqrt[14]{5})^{200}$.

53. Să se găsească termenii iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

54. Să se determine m, n, p astfel încît în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$ termenii de rang 12 și 24 să conțină pe x, respectiv pe x^5 și, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

55. Să se găsească numărul total al termenilor dezvoltării $(x + y)^{2n+1} + (x - y)^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, după ce se efectuează reducerile de termeni posibile.

56. Fie a și b numere întregi nenule $(b > 0)$ prime între ele, astfel încît $\sqrt[7]{a}$ și $\sqrt[14]{b}$ să fie iraționale. Fără a efectua dezvoltarea binomului $(\sqrt[7]{a} + \sqrt[14]{b})^{77}$, să se găsească numărul termenilor raționali ai acesteia.

57. Să se determine coeficientul termenului, care conține x^3 în produsul dezvoltărilor $(1 + x)^7(1 - x)^4$.

58. Să se găsească suma coeficienților dezvoltărilor:
a) $(9x^4 - 8y^3)^{19}$; b) $(8x^2 - 6y^3)^8$.

59. Să se găsească suma coeficienților dezvoltării $(9x - 8y)^n$.

60. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltările:
a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$.

61. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, numărul $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ este natural.

62. Să se determine numărul de termeni care trebuie luați în dezvoltarea $(1 + 10^{-2})^{10}$ pentru a se defini numărul $(1 + 10^{-2})^{10}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, respectiv 10^{-4}.

63. Să se arate că $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k = 2^{6n}$.

64. Să se demonstreze că:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$;

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ... = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$.

65. Să se demonstreze că:

a) $1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + ... = (-1)^n 2^n \cos \frac{2n\pi}{3}$;

b) $C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - ... = \frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$.

66. Să se demonstreze că

$$C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + ... = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6}.$$

67. Să se demonstreze că:

a) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

68. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$ și $|x| \leqslant 1$, avem

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n \leqslant 2^n.$$

69. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$; b) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n + 1)C_n^n$;

c) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + ... + (n-1)C_n^n$; d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (2n-1)C_n^n$;

e) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n(n + 1)C_n^n$;

f) $C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + ... + (4n - 1)C_n^n$;

g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$; h) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^n}{n+1}$;

i) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + ... + \frac{C_n^n}{n+2}$; j) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$;

70. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)C_n^m$; b) $C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + ... + C_{n+m}^k$;

c) $C_n^0 + C_n^k + C_n^{2k} + ...$; d) $C_n^m + C_n^{m+k} + C_n^{m+2k} + ...$

71. Să se calculeze următoarele sume:

a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2$; b) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - ... + (-1)^n(C_n^n)^2$;

c) $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - ... + (-1)^n C_n^n$; d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + ... + 2^n C_n^n$;

Capitolul XI

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 5n - 2$; b) $b_n = n^2 - 3$; c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$;

d) $y_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^n n$; e) $z_n = \frac{2n}{3n + 1}$;

f) $c_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{(-1)^{n+1}}$; g) $a_n = \frac{1 + (-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea ($n \geqslant 1$) pentru fiecare din șirurile:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...$; b) 0; 0,01; 0,0101; ...; c) $\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}, \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}, ...$; d) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, ...$; e) $\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{11}{17}, ...$

3. Șirul (x_n), $n \geqslant 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 3n^2 - 2$. Să se decidă dacă este termen al acestui șir numărul:

a) 190; b) 241; c) 3725; d) 15985.

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului (a_n), definit prin:

a) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $a_1 = \beta$, $a_{n+1} = 2a_n$, $\beta \in \mathbf{R}$;

c) $a_1 = \gamma$, $a_{n+1} = \frac{\gamma}{a_n}$, $\gamma \in \mathbf{R}$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \alpha a_n - \beta a_{n+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \beta a_n + \alpha a_{n+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5. Fie șirul de numere (a_n), unde $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, și pentru orice număr natural k, avem

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}.$$

Să se demonstreze că $a_n = 2^n + 1$, oricare ar fi $n \geqslant 1$.

6. Fie șirul de numere reale (a_n), unde $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ și pentru orice număr natural k, avem

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2.$$

Să se găsească formula termenului general.

7. Fie șirul de numere (b_n) astfel încît $b_1 = 1$ și $b_{n+1} = b_1 - \frac{1}{n(n+1)}$. Să se găsească formula care definește termenul general.

8. Fie șirul (x_n), definit astfel: $x_1 = 1$ și $x_{k+1} = (k+1)x_k$. Să se demonstreze că oricare ar fi n, avem $x_n = n!$.

9. Fie șirul (y_n) definit prin: $x_1 = \frac{2}{3}$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Să se găsească formula care definește termenul general.

10. Fie α, β numere reale cu $\alpha \neq \beta$. Se definește (c_n) astfel încît $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$ și pentru fiecare $k \geqslant 2$, $c_k = (\alpha + \beta)c_{k-1} - \alpha\beta c_{k-2}$.

Să se arate că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$.

11. Fie α, β numere reale astfel încît $\alpha \neq \beta$ și $\alpha\beta \neq 1$. Se definește șirul (a_n) astfel încît $a_2 = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta) - 1}$, iar pentru fiecare $k \geqslant 3$, $a_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{a_k}$.

Să se demonstreze că pentru orice $n \geqslant 2$, avem

$$a_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}.$$

12. Fie S_n suma primilor n termeni ai șirului

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots .$$

a) Să se găsească o formulă pentru S_n.

b) Să se arate că $S_{p+q} - S_{p-q} = pq$, unde p și q sînt numere naturale cu $p > q$.

13. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, $r = -3$; b) $a_{10} = 131$, $r = 12$;

c) $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$; d) $a_3 = 11$, $a_5 = 19$.

Să se dea apoi formula termenului al n-lea.

14. Să se găsească termenii a_1, a_3, a_5, a_6 ai progresiei aritmetice următoare:

$$a_1, -7, a_3, -1, a_5, a_6, 8, \ldots .$$

15. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_5 = \frac{\alpha}{3}$ și $r = \frac{10\alpha}{3}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

16. Fie (x_n) o progresie aritmetică astfel încît $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ și $r = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Să se determine n, știind că $x_n = 4\alpha + 3\beta (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

17. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7, \\ a_8 - a_7 = 2a_4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 120, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 15; \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12, \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18. \end{cases}$

18. Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, $a_5 = 14$; b) $a_{10} = 50$; $r = 7$.

19. Șirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea:

$y_n = \alpha n + \beta$, unde α, $\beta \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că șirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

20. Să se decidă dacă este progresie aritmetică un șir pentru care suma primilor n termeni este dată de formula $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. În caz afirmativ, să se găsească formula termenului general.

21. Să se determine termenul al n-lea al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_1 = \alpha$ și $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei termeni consecutivi ai șirului (a_n), dat prin formula termenului general următoare, nu sînt în progresie aritmetică:

a) $a_n = n^2$; b) $a_n = \sqrt{n}$; c) $a_n = \frac{1}{n}$.

23. Fie (a_n) o progresie aritmetică. Să se studieze dacă este progresie aritmetică șirul (b_n) al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $b_n = \alpha a_n$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $b_n = a_{2n}$; c) $b_n = a_n + \alpha$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$;

d) $b_n = \frac{\alpha}{a_n}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $b_n = a_n^2$.

24. Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, numerele $(a+b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a-b)^2$ sînt în progresie aritmetică.

25. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sînt în progresie aritmetică, atunci ele sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5.

26. Să se determine suma primilor n termeni ai șirului:

a) $1, -2, 3, -4, \ldots$; b) $1, -3, 5, -7, \ldots$.

27. Fie numerele a_1, a_2, a_3 și respectiv b_1, b_2, b_3 în progresie aritmetică. Să se arate că, dacă $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, iar numerele $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ sînt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

28. Să se găsească termenul general al șirului

$$2, 4, 7, 11, \ldots,$$

care are proprietatea că diferențele între termenii vecini formează o progresie aritmetică.

29. Fie a, b, c, d numere reale nenule, astfel încît:

$$a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}}, \quad b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}}, \quad c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}, \quad d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}}$$

sînt în progresie aritmetică. Să se arate că a^2, b^2, c^2, d^2 sînt în progresie aritmetică.

30. Dacă α, β, γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, să se arate că ctg α, ctg β, ctg γ sînt în progresie aritmetică dacă și numai dacă cos 2α, cos 2β, cos 2γ sînt în progresie aritmetică.

31. Se dă binomul $(a+b)^m$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3x)}}$ și $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, logaritmul fiind în baza 10. Să se determine x, știind că termenul dezvoltării care conține pe b^5 este 21, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen al dezvoltării binomului sînt în progresie aritmetică.

32. Să se găsească toate valorile reale ale lui a, nenule, astfel încît ecuaţia

$$x^8 + ax^4 + a^4 = 0$$

să aibă exact patru rădăcini reale, care să fie în progresie aritmetică.

33. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n), dacă: a) $b_1 = 3$, $q = -2$; b) $b_8 = 384$, $q = 2$; c) $b_6 = 25$, $b_8 = 9$; d) $b_3 = 20$, $b_9 = 1280$.

34. Să se găsească termenii b_2, b_3, b_5, b_6 ai progresiei geometrice următoare:

$$\sqrt{2},\ b_2,\ b_3,\ 12\sqrt{3},\ b_5,\ b_6,\ 216\sqrt{2},\ \ldots .$$

35. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice (a_n), dacă:

a) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_4 - a_2 = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 + a_2 - a_4 = -119, \\ a_4 + a_1 - a_3 = 265. \end{cases}$

36. Să se decidă dacă este progresie geometrică un şir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 + 1$; b) $S_n = 4^n - 1$; c) $S_n = 5^n - 5$.

37. Fie (b_n) o progresie geometrică. Să se studieze dacă este progresie geometrică şirul (c_n), al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $c_n = \beta b_n$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; b) $c_n = b_{2n}$; c) $c_n = b_n + \beta$, cu $\beta \in \mathbf{R}$;

d) $c_n = \dfrac{\beta}{b_n}$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; e) $c_n = b_n^3$.

38. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $|a| \neq |b|$, să se arate că numerele $(a + b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$ sînt în progresie geometrică.

39. Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ sînt în progresie geometrică, atunci

$$(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2.$$

40. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3$. Să se arate că numerele x, y, z sînt în progresie geometrică.

41. Să se calculeze suma

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \ldots + 100 \cdot 2^{90}.$$

42. Să se demonstreze că

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

43. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă numerele ab, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, atunci numerele b, c $2b - a$ sînt în progresie geometrică.

44. Să se găsească suma

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

45. Fie (a_n) o progresie aritmetică, iar (b_n) o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încît $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Să se demonstreze că $a_n \leqslant b_n$, pentru orice n.

46. Fie a_1, a_2, a_3 şi b_1, b_2, b_3 cîte trei numere în progresie aritmetică (respectiv geometrică) astfel încît $b_1 \neq b_2$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Să se arate că, dacă a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 sînt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_2$ (respectiv $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$).

47. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică, astfel încît suma logaritmilor, în baza 3, a acestor numere să fie egală cu 2. Să se găsească aceste numere, ştiind că $\log_3(a_5/a_3) = -2$.

48. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale, mai mici sau egale cu 1 000 şi care nu se divid cu 13.

49. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Dacă termenii: al cincilea, al optulea şi al unsprezecelea, ai acestei progresii sînt respectiv, primul, al doilea şi al zecilea termen pentru o progresie aritmetică, să se găsească primul termen al progresiei geometrice.

50. Fie numerele reale distincte a, b, c cu $a + b + c = 124$, astfel încît acestea să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Dacă presupunem, în plus, că a, b, c sînt, respectiv al treilea, al treisprezecelea şi al cincisprezecelea termen pentru o progresie aritmetică, să se determine numerele a, b, c.

51. Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Dacă presupunem, în plus, că termenii: al patrulea, al zecelea şi al şaptelea ai acestei progresii sînt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, să se determine primul termen al progresiei aritmetice.

52. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere pozitive în progresie geometrică, să se arate că

$$a_1a_2 \ldots a_n = \sqrt{(a_1a_n)^n}.$$

53. Fie $a \in \mathbf{R}$ un număr real. Să se arate că există $b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît b să fie media aritmetică între a şi c, c să fie media geometrică între a şi b şi a să fie media armonică (a se vedea ex. 33, cap. IV) între b şi c.

54. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, un număr par de numere reale în progresie geometrică, astfel încît suma lor să fie de cinci ori mai mare decît suma termenilor de rang par. Să se găsească raţia progresiei.

55. Fie (a_n) o progresie aritmetică şi (b_n) o progresie geometrică, astfel încît

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 155, \quad b_1 + b_2 = 9.$$

Să se determine progresiile dacă a_1 este raţia progresiei geometrice, iar b_1 este raţia progresiei aritmetice.

56. Fie (a_n) o progresie aritmetică şi (b_n) o progresie geometrică, astfel încît

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3 - 8.$$

Să se determine progresiile.

57. Fie (a_n) o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, astfel încît $a_2 = \sqrt{a_1a_4}$.

Să se demonstreze că a_4, a_6, a_9 sînt în progresie geometrică.

Să se determine raţia.

58. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+2}$, în progresie geometrică descrescătoare. Să se demonstreze că

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}.$$

59. După o povestire orientală, inventatorul jocului de şah solicitînd recompensa, s-a adresat suveranului său astfel: „Eu doresc pentru prima

căsuță un bob de grîu, pentru a doua, 2 boabe de grîu, pentru a trei 2^2 boabe de grîu ș.a.m.d., pentru a 64-a doresc 2^{63} boabe de grîu". Să se calculeze numărul boabelor de grîu cerute suveranului.

60. Să se arate că în triunghiul lui Pascal, suma termenilor fiecărei linii este dublul sumei termenilor liniei precedente. Să se afle suma termenilor unui triunghi al lui Pascal cu 64 de linii.

61. Dacă $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, să se găsească sumele:

I) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2;$

II) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n - \frac{1}{a^n}\right)^2.$

62. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive.

a) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie aritmetică, să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie geometrică, să se calculeze

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}.$$

63. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, în progresie geometrică crescătoare și p un număr natural nenul. Să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}$$

și

$$S'_n = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p}$$

nu depinde de n.

64. Un șir de numere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este astfel încît, oricare ar fi k, avem:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = ak^2 + bk,$$

unde a, b sînt numere reale date. Să se demonstreze că acest șir este o progresie aritmetică. Să se deducă în funcție de a și b primul termen și rația acesteia.

65. Să se găsească termenul general al șirului (a_n), definit prin:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ și pentru orice } n \geqslant 2 \text{ avem } \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n.$$

66. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ în progresie aritmetică, cu rația r și fie $S_n = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$, unde $m \in \mathbf{N}$.

a) Calculîndu-se diferențele $a_{k+1}^p - a_k^p$, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, să se demonstreze că

$$a_{n+1}^p - a_1^p = C_p^1 r S_{p-1} + C_p^2 r^2 S_{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} S_1 + C_p^p r^p S_0,$$

oricare ar fi $p \geqslant 1$, număr natural.

b) Reciproc, dacă egalitatea de mai înainte este adevărată pentru orice p și n, atunci numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie aritmetică cu rația r.

67. Se formează numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$, definite prin relația de recurență:

$$b_n = \alpha b_{n-1} + \beta, \text{ unde } b_1, \alpha, \beta \text{ sînt numere reale date.}$$

a) Presupunem că $\alpha \neq 1$ și fie q rădăcina ecuației $x = \alpha x + \beta$. Să se demonstreze că numerele: $b_1 - q, b_2 - q, \dots, b_n - q$ sînt în progresie geometrică. Să se deducă, de aici, expresia lui b_n în funcție de n.

b) Să se deducă o formulă pentru suma

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Să se examineze cazul $\alpha = 1$.

68. Să se calculeze suma

$$S = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1} + \dots + a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k},$$

unde (a_n) este o progresie aritmetică.

69. Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} + \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1}},$$

unde (a_n) este o progresie aritmetică.

70. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n$;

b) $S_2 = q + 4q^2 + 9q^3 + \dots + n^2 q^n$,

q fiind un număr real.

71. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ numere în progresie aritmetică și $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Să se demonstreze că

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}.$$

Capitolul XII

NOŢIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Folosind algoritmul lui Euclid să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 63; 1971; b) 285; 322; c) -10; 55; d) -72; -88; e) -45; 525; f) 720; 2860; g) 4410; 3675.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 160; 120; b) 180; 240; c) 1250; 200; d) 1620; 584.

3. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 5 care împărțit prin 6, 8, 9, 12 și 16 să dea același rest 5.

4. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 6 care împărțit prin 8, 12, 20 și 30 să dea același rest 6.

5. Să se determine numerele naturale a și b astfel încît $a + b = 60$ și cel mai mare divizor comun al lor este 12.

6. Să se determine numerele naturale a și b astfel încît cel mai mare divizor comun este 6 și cel mai mic multiplu comun este 216.

7. Să se determine numerele naturale a și b $(a > b)$ astfel încît $a^2 - b^2 = 2880$ și cel mai mare divizor comun al lui a și b este 8.

8. Care este ultima cifră a numerelor: 323^{700}, 1244^{51}, 1982^{83}, 164^{41}, 194^{53}, $17^{60} + 12^{40}$, $13^{20} + 22^{30}$?

9. Care este restul împărțirii numerelor:

a) $19^{42} \times 23^{51}$ prin 7; b) $17^{36} \times 21^{41}$ prin 5 ?

10. Care este ultima cifră a numărului $7^{7^{7}}$?

11. Dacă $n \geqslant 5$, atunci ultima cifră a numărului $1! + 2! + \ldots + n!$ este egală cu 3. Să se deducă de aici că numărul $1! + 2! + \ldots + n!$ pentru $n \geqslant 4$ nu este pătrat perfect.

12. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că restul împărțirii lui n^3 prin 7 este 0 sau 1 sau 6.

13. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se determine restul împărțirii lui $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ prin 4.

14. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, fracțiile: a) $\dfrac{5n+3}{8n+5}$, b) $\dfrac{33n+4}{22n+3}$ sînt ireductibile.

15. Fie $n, a, b \in \mathbf{N}$. Dacă $5a - 21b = \pm 1$, atunci fracția $\dfrac{21n+a}{5n+b}$ este ireductibilă.

16. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 17b$ și $2a + 7b$ este egal cu cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

17. Fie a și b două numere prime. Să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: $a + b$ și $a - b$.

18. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Să se arate că: $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ și $7 \mid b$.

19. Să se demonstreze că dacă $n \geqslant 2$ atunci 3 nu divide numărul $C_n^2 + 1$.

20. Dacă $n \geqslant 2$, să se arate că 3 divide numărul $C^2_{C_n^2}$.

21. Să se arate că numărul $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ se divide prin 10 dacă n este impar.

22. Să se arate că: $6/n^3 - n$, $30/n^5 - n$, $42/n^7 - n$, $6/n^3 + 11n$, $60/n(n^2-1)\cdot(n^2+1)$, $6/n(n+1)(2n+1)$, $6/n(2n+1)(7n+1)$, $24/n(n+1)(n+2)\cdot(n+3)$.

23. Fie m și n numere naturale. Să se arate că: $m!n!$ divide $(m+n)!$

24. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $5/n^2 - 3n + 6$.

25. Să se arate că numărul $\dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

26. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $7/n^3 + n - 2$.

27. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $7/2^{2n} + 2^n + 1$.

28. Să se arate că: $7/3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $11/3^{2n} + 2^{6n-5}$.

29. Să se arate că: $5/17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

30. Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, să se arate că: $170/153^n + 45^n - 28^n$.

31. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că: $7/2^n - 1 \Leftrightarrow 3/n$.

32. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că 7 nu divide pe $2^n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

33. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$, astfel încît: $11/3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

34. Să se arate că dacă n este un număr natural, atunci: $n^2/(n+1)^n - 1$.

35. Dacă p este un număr prim, să se arate că: p/C_p^k, pentru orice $0 < k < p$.

36. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p/2^p - 2$.

37. Dacă numărul $a^k - 1$ $(a \in \mathbf{Z}$ și $k > 1)$ este prim, atunci $a = 2$ și k este număr prim.

38. Dacă numărul $a^n + 1$ este prim $(a > 1$ și $n > 1$, $a \in \mathbf{N})$, atunci a este par și n este de forma 2^m.

39. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 și nici cu 7.

40. Fie a, b două numere naturale nenule. Dacă a/b^2, b^2/a^3, a^3/b^4, $b^4/a^5, \ldots$ atunci $a = b$.

41. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sînt de forma $4k - 1$; $k \in \mathbf{N}$.

42. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sînt de forma $6k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

43. Dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci numărul: $E = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ este un pătrat perfect.

44. Fie $m, n \in \mathbf{N}$. Dacă $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, atunci m și n sînt pătrate perfecte.

45. Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci restul împărțirii lui p^2 prin 12 este 1.

46. Dacă p și $8p^2 + 1$ sînt numere prime, atunci $8p^2 - 1$ este de asemenea număr prim.

47. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x + y = xy$.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

49. Să se arate că nu există numerele întregi $x > 0$ și $y > 0$ astfel încît să avem egalitatea: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația: $5x + 7y^2 = 1600$.

51. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x = 4[\sqrt{x}] + 1$.

52. Să se afle valorile numărului $n \in \mathbf{N}$ astfel încît 12 să dividă pe $n^4 - n^2 - 24$.

53. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Dacă există două numere prime distincte care îl divid pe n, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor $C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}$ este 1.

54. Fie p un număr natural și $n = p^m (m > 0)$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}$ este p.

55. Care sînt ultimele două cifre ale numărului 2^{999}?

56. Să se arate că suma a n numere naturale impare consecutive nu este un număr prim $(n > 1)$.

57. Dacă $n > 0$ este un număr natural, numărul $n^4 + n^2 + 1$ poate fi prim?

58. Să se demonstreze că numărul $2^{2^n} - 1$ are în descompunerea sa în factori primi cel puțin n numere prime distincte.

59. Fie $n \geq 1$ un număr natural avînd descompunerea sa în factori primi $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$ unde $p_1, p_2, ..., p_n$ sînt numere prime distincte. Să se arate că numărul divizorilor (pozitivi) ai lui n este $(k_1 + 1)(k_2 + 2) ... (k_n + 1)$.

60. Să se arate că orice număr de n cifre $(n > 1)$ este mai mare decît produsul cifrelor sale.

61. Din șirul de numere naturale 1, 2, 3, ..., $2n$ se aleg $n + 1$ numere. Să se arate că în aceste $n + 1$ numere alese există două numere astfel ca unul să îl dividă pe celălalt.

62. Fie $a, b, c, \in \mathbf{Z}$. Dacă $6/a + b + c \Rightarrow 6/a^3 + b^3 + c^3$.

63. Dacă m, n sînt numere naturale astfel încît $m = n + 2$, să se arate că numerele $n^4 + 4$ și $m^4 + 4$ nu sînt prime între ele.

64. La ce putere apare 2 în descompunerile lui 50! și 100!?

65. Fie m, n două numere naturale nenule. Să se arate că:

$\pm \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n+1} \pm \frac{1}{n+2} \pm ... \pm \frac{1}{n+m} \notin \mathbf{Z}$. (semnele +, respectiv − se iau oricum).

66. Să se arate că nu există pătrate perfecte de forma:

$$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5, \text{ cu } n \text{ număr întreg.}$$

67. Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_9$ o rearanjare oarecare a numerelor 1, 2, 3, ..., 9. Să se arate că numărul: $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)...(a_9 - 9)$ este par.

68. Să se arate că dacă $9/a^3 + b^3 + c^3$, cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci cel puțin unul dintre numerele a, b sau c este divizibil cu 3.

69. Să se arate că există o infinitate de numere întregi n astfel încît $4n^2 + 1$ să fie divizibil cu 5 și cu 13.

70. Se dau 51 de numere naturale cuprinse între 1 și 100. Să se arate că există printre acestea, două cu proprietatea că unul îl divide pe celălalt.

71. Fiind date $2^{n+1} - 1$ numere întregi, să se arate că există 2^n dintre acestea cu suma divizibilă cu 2^n.

72. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, există o infinitate de numere întregi avînd exact $2n$ divizori.

73. Să se arate că un număr întreg n are $4m + 2$ divizori întregi $(m \in \mathbf{N})$ dacă și numai dacă $|n|$ este un pătrat perfect.

74. Fie n un număr prim care scris în baza 10 are toate cifrele egale cu 1. Să se arate că numărul cifrelor sale este tot un număr prim.
Este adevărată reciproca?

75. Să se arate că oricare ar fi un număr natural n, există n numere întregi consecutive care să aibă fiecare cel puțin 2 divizori primi distincți.

76. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, m, n, cu $m, n > 0$, avem: $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

77. Să se arate că între numerele n și $n!$ există cel puțin un număr prim $(n \geq 2)$.

78. Dacă a și $b \in \mathbf{Z}$ astfel încît $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$, atunci a și b sînt cuburi perfecte.

79. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului 2^{30}.

80. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $39^{30} - 38^{30}$.

Capitolul XIII

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI. ECUAȚII ALGEBRICE

1. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă:

a) $f = X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 4,\quad g = X^2 - X + 3;$
b) $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1,\quad g = X^3 - X + 1;$
c) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3,\quad g = X^2 + X + 1;$
d) $f = X^8 - 3X^6 + 5X^4 - 2X^2 + 1,\quad g = X^3 - 4X + 1.$

2. Aplicînd schema lui Horner, să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f:

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9,\quad g = X - 1;$
b) $f = 3X^5 - 4X^4 + 7X^3 + X + 3,\quad g = X - 2;$
c) $f = -2X^6 + 8X^5 - 5X^4 + 3X + 7,\quad g = X + 3;$
d) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9,\quad g = 2X + 1.$

3. Să se determine un polinom de gradul doi $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încît: $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 9$.

4. Să se determine în raport cu parametrul m, gradul polinomului $f = (m^2 + 3m + 2)X^4 + (m^3 + 2m^2 - m - 2)X^3 + (m^2 + 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$.

5. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 6$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}$.

6. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1$. Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}$.

7. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + 5$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$.

8. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 8$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}$.

9. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți numere întregi.

I) Să se arate că dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a)$ divide numărul: $f(a + f(a))$.

II) Să se arate că există un număr $a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a)$ să nu fie un număr prim.

10. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît să fie îndeplinită condiția: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

11. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărțit la $X - 2$ să dea restul 4.

12. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ împărțit la $X - 1$ să dea restul 5.

13. Să se afle polinomul de gradul cel mai mic astfel încît împărțit la $X + 1$ să dea restul 2 și împărțit la $X - 1$ să dea restul -3.

14. Să se arate că restul împărțirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$ unde $b \neq a$ este $r = \dfrac{(X - a)f(b) - (X - b)f(a)}{b - a}$.

15. Să se arate că restul împărțirii polinomului cu coeficienți reali $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ prin $X^2 + 1$ este polinomul $r = g(-1) + h(-1)X$ unde $g = a_0 + a_2X + a_4X^2 + a_6X^3 + a_8X^4 + \ldots$, iar $h = a_1 + a_3X + a_5X^2 + a_7X^3 + \ldots$

16. Să se determine parametrul m astfel ca polinomul $X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă prin $X + 2$.

17. Să se arate că polinomul $X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 5X - 3$ se divide la $X - 1$; se cere cîtul împărțirii.

18. Dacă n este un număr par, să se arate că $X + 1$ divide polinomul $(X - 1)^n - (X + 3)^n$, dar $(X + 1)^2$ nu divide pe $(X - 1)^n - (X + 3)^n$.

19. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

20. Să se arate că polinomul $nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

21. Să se arate că polinomul $X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$ este divizibil prin $(X - 1)^2$; să se afle cîtul împărțirii.

22. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3}$.

23. Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{6n-1} + X + 1$.

24. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5}$.

25. Să se arate că polinomul $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 - 1$.

26. Să se arate că polinomul $X^{5a_1} + X^{5a_2+1} + X^{5a_3+2} + X^{5a_4+3} + X^{5a_5+4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 fiind numere naturale, este divizibil prin $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

27. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

28. Să se arate că polinomul $(X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ se divide la $X^2 - X + 1$.

29. Să se determine un polinom f de gradul cinci știind că $f + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$ iar $f - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

30. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m - X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

31. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m + X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

32. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali care satisfac relația: $XP(X - 1) = (X - 26)P(X)$.

33. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît: $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$.

34. Fie $f(X)$ un polinom de gradul doi cu coeficienți raționali; atunci $f(n) \in \mathbf{Z}$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ dacă și numai dacă $f(X)$ este de forma $f(X) = \frac{1}{2}[cX^2 + (2b - c)X + 2a]$ cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

35. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor, cu ajutorul algoritmului lui Euclid:

a) $f = 6X^6 - X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 8X^2 - 7X + 2$, $g = 2X^5 - X^4 - 10X^3 + 15X^2 - 9X + 2$;

b) $f = 5X^7 - 10X^6 + 8X^5 - 16X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 2$, $g = 5X^5 - 9X^4 - 2X^3 + 2X - 4$;

c) $f = 10X^7 + 35X^5 - 13X^4 + 15X^3 - 14X^2 + 3X$, $g = X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 4X - 2$;

d) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3$, $g = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3$;

e) $f = 2X^6 + 5X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 5X + 3$, $g = 2X^5 + 5X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 5X - 3$.

36. Să se arate că următoarele polinoame sînt prime între ele:

a) $f = X^4 + X^3 + 3X^2 + 7X + 20$, $g = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 20$;

b) $f = X^5 - 6X^4 + 8X^3 + X^2 - 6X + 8$, $g = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 22X^2 + 12$.

37. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n - 1$ și $X^m - 1$.

38. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n + a^n$ și $X^m + a^m$.

39. Să se descompună în factori, cu coeficienți reali, polinoamele:

a) $f = X^4 - 1$; b) $f = X^6 - 1$; c) $f = X^8 - 1$.

40. Să se descompună în factori, cu coeficienți reali, polinomul $f = X^{2n} - 1$.

41. Să se rezolve ecuațiile, știind că între rădăcini există relațiile:

a) $4x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 26x + 12 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

b) $2x^3 - 9x^2 + mx + 75 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

c) $6x^3 - mx^2 + 64x + 12 = 0$, $x_1 = 3x_2$;

d) $x^4 - 12x^3 - 2x^2 + mx + 297 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

e) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

f) $3x^3 - 32x^2 + 73x + 28 = 0$, $x_1 - x_2 = 3$;

g) $2x^4 + 2x^3 - 38x^2 + 22x + 60 = 0$, $x_1 + x_2 = -3$;

h) $x^4 + 10x^3 + mx^2 + 50x + 24 = 0$, $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$;

i) $x^3 + 5x^2 - 2x - m = 0$, $x_1 + x_2 = -7$;

j) $2x^3 + x^2 - 76x + 105 = 0$, $x_1 - x_2 = 12$;

k) $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$, $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

42. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se arate că:

a) $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$;

b) $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) = 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$.

43. Fie ecuația $x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că această ecuație are o rădăcină independentă de m.

b) Dacă x_2 și x_3 sînt celelalte două rădăcini, să se determine m astfel încît $\lg|x_2 - x_3| = \frac{1}{2}\lg(6m + 5)$.

44. Fie ecuația: $4ax^4 - 2(a^2 + a + 1)x^3 + (a^2 - 16a + 1)x^2 + 8(a^2 + a + 1)x - 4(1 + a^2) = 0$.

a) Să se arate că ecuația are trei rădăcini raționale independente de a.

b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației, să se determine a astfel încît:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{11}{2}.$$

45. Fie ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, ecuația are o rădăcină ce aparține intervalului $[-1, 1]$.

b) Să se determine m știind că ecuația are o rădăcină dublă.

c) Să se determine m astfel încît $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6$ unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației.

46. Să se arate că ecuația: $x^4 + (a + 1)x^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, are cel mult două rădăcini reale.

47. Să se arate că ecuația $x^4 + mx^3 + (2m^2 + 1)x^2 + nx + p = 0$ nu poate avea toate rădăcinile reale unde $m, n, p \in \mathbf{R}$.

48. Se dă polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a și b și să se rezolve ecuația $f(X) = 0$, știind că restul împărțirii lui $f(X-1)$ la $X + 1$ este -4 și că rădăcinile ecuației $f(X) = 0$ satisfac relația: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9$.

49. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$. Să se determine a și b și să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ știind că restul împărțirii polinomului $f(X + 1)$ la $X - 8$ este 9 și că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{13}{2}$.

50. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $e^{f(x)} \leqslant 1$.

51. Să se arate, prin inducție după n, că rădăcinile polinomului $f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ sînt $1, 2, \ldots, n$.

52. Să se arate că rădăcinile polinomului: $f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ sînt simple.

53. Să se arate prin inducție că rădăcinile ecuației

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} = 0, \ n \in \mathbf{N},$$

sînt $-1, -2, -3, \ldots, -n$.

54. Fie ecuația $x^3 + x + m = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine m astfel încît $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$ unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației.

55. Se consideră ecuațiile $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ și $y^3 + (b + c)y^2 + (c + a)y + a + b = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3, respectiv y_1, y_2, y_3. Să se determine a, b, c astfel încît $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 1$.

56. Fie ecuația $x^4 + m^2x^3 + 3x + 1 = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, această ecuație are o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

57. Să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^2 - 8x^2 - 12x + m = 0$, știind că rădăcinile sînt în progresie geometrică.

58. Se dă polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$ unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $E(m) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în care x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

b) Să se determine valorile parametrului m astfel încît $E(m) \geqslant 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m astfel încît polinomul f să se dividă la $X - 1$ și să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ în acest caz.

59. Să se arate că polinomul $f = X^4 + 12X - 5$ are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2; să se rezolve ecuația.

60. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine n și p astfel încît $X^2 + 1$ să dividă pe f.

b) Dacă g este cîtul împărțirii lui f la $X^2 + 1$, să se calculeze $g(1) + g(2) + \ldots + g(n)$.

61. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Să se determine a, b, c, d astfel încît $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

62. Să se arate că ecuația $x^3 + 3x - 2 = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$. Să se arate că celelalte două rădăcini sînt complexe.

63. Să se arate că ecuația: $x^3 - 3x - 2\sqrt{2} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

64. Să se arate că ecuația $x^3 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

65. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{C}$, ecuația $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = 0$ știind că admite o rădăcină reală.

66. Fie polinomul : $f = X^4 + aX^3 + bX + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale lui $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel ca f să se dividă la $X^3 - X$.

b) În cazul cînd $f(0) = f(1)$ să se determine a, b, c astfel ca polinomul f să aibă rădăcina $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ și în acest caz să se determine celelalte rădăcini.

67. Să se determine m și să se rezolve ecuația $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$, știind că are o rădăcină dublă.

68. Fie ecuația $x^3 + px^2 + 2p^2x + 3p^3 = 0$. Să se arate că $16(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 + 27(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 = 0$.

69. Să se determine a, b, c astfel ca aceste numere să fie rădăcinile ecuației $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$.

70. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $f(\alpha) \geqslant 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Atunci există două polinoame $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît $f = f_1^2 + f_2^2$.

71. Fie f un polinom cu coeficienți întregi și $a \in \mathbf{Z}$. Dacă $f(a)$ și $f(a + 1)$ sînt numere impare, atunci f nu are rădăcini întregi.

72. Fie f un polinom cu coeficienți întregi. Presupunem că f ia valoarea $+1$ pentru cel puțin patru numere întregi distincte. Atunci pentru orice $a \in \mathbf{Z}$,

$f(a) \neq -1$. Afirmația rămîne adevărată dacă f ia valoarea $+1$ pentru numai trei numere întregi distincte?

73. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi distincte a, b, c, d astfel încît $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 12$, atunci $f(k) \neq 17$, $(\forall) k \in \mathbf{Z}$.

74. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi a, b, c, d distincte, astfel încît:

$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$, să se arate că:

$$f(k) \neq 1, 3, 5, 9, 11 \ (\forall)\, k \in \mathbf{Z}.$$

75. Să se rezolve ecuațiile, știind că admit rădăcini independente de m:

a) $x^4 + mx^3 + (2m + 3)x^2 + 3mx + 6m = 0$, $m \in \mathbf{R}$;

b) $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

76. Fie ecuația $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{x_3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$;

b) $y_1 = \dfrac{x_2x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \dfrac{x_1x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + 1$;

c) $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}$;

d) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;

e) $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_1x_2$;

f) $y_1 = \dfrac{1}{x_2 + x_3}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_1 + x_3}$, $y_3 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$.

77. Fie ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3, unde:

a) $y_1 = x_2 + x_3 + kx_1$, $y_2 = x_1 + x_3 + kx_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + kx_3$;

b) $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_1x_3$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$;

c) $y_1 = x_2^2 + x_3^2$, $y_2 = x_1^2 + x_3^2$, $y_3 = x_1^2 + x_2^2$.

78. Fie ecuația $x^3 - px + q = 0$. Să se calculeze în funcție de p și q expresia

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2^2}.$$

79. Fie ecuația $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Să se calculeze: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației.

80. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x^4 - x^3 - 39x^2 + 18x + 54 = 0$, dacă $x_1 = 3\sqrt{2}$;

b) $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$, dacă $x_1 = 3i$;

c) $15x^4 + 23x^3 + 544x^2 + 828x + 144 = 0$, dacă $x_1 = 6i$;

d) $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - mx + n = 0$, $m,n \in \mathbf{R}$, dacă $x_1 = 2 + i$;

e) $2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 9x - 9 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{2} + i$;

f) $x^5 - 56x^4 - 10x^3 + 560x^2 + x - 56 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

g) $x^4 - (63 - 64\sqrt{3})x^3 - (65 + \sqrt{3})x^2 - (63 - \sqrt{3})x + 64 + 64\sqrt{3} = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;

h) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, dacă $x_1 = -i$;

i) $x^3 - 2x^2 + nx + p = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{2}$;

j) $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, dacă $x_1 = 1 + 2i$;

k) $x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$, dacă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$.

81. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$. Să se determine m, n, p astfel ca f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15, iar ecuația $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină egală cu $-1 + i$.

82. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:

a) $x^4 - (2m^2 - 1)x^2 + (m^2 - 6) = 0$;

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

c) $x^4 - 20x^2 + 96 = 0$; d) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;

e) $x^4 - (2m + 1)x^2 + m^2 + m = 0$; f) $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$.

83. Să se rezolve ecuațiile reciproce:

a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$; b) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$;

c) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$; d) $2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$;

e) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$; f) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$.

84. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$x^6 - (m - 1)x^4 + (m - m^2)x^2 + 2m - m^2 = 0, \quad m \in \mathbf{R}.$$

85. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$x^4 + x^3 + x^2 + mx + m^2 = 0, \quad m \in \mathbf{R}.$$

86. Să se rezolve ecuația $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2$, $a \in \mathbf{R}$. Discuție.

87. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

88. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că ecuația în x, $(x + z)^n - (x + \bar{z})^n = 0$ are toate rădăcinile reale.

89. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ unde $a_i \in \mathbf{R}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Dacă $0 < a_0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, atunci oricare ar fi rădăcina α (reală sau complexă) a lui f, avem $|\alpha| \leqslant 1$.

90. Fie $Z[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți numere întregi. Fie p un număr întreg prim și $f, g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $p/fg \Rightarrow p/f$ sau p/g.

91. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Notăm cu $c(f)$ = cel mai mare divizor comun al coeficienților lui f. Dacă $f, g \in \mathbf{Z}[X]$ să se arate că $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$.

92. *Criteriul lui Eisenstein*: Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n (n \geqslant 1)$ un polinom din $\mathbf{Z}[X]$ astfel încît $c(f) = 1$. Presupunem că există un număr prim p astfel încît p/a_i, $(\forall) 0 \leqslant i \leqslant n-1$, p nu divide pe a_n și p^2 nu divide pe a_0. Atunci f nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

93. Dacă p este nu număr prim, polinomul $X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

94. Să se arate că polinomul $X^{52} + X^{51} + X^{50} + ... + X^2 + X + 1$ nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

95. Să se arate că polinomul $X^n - 120$ $(n \geqslant 1)$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

96. Să se arate că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr prim, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

97. Să se arate că polinomul $X^{2^n} + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

98. Să se determine numerele întregi a, b, astfel încît polinomul $X^4 + aX^2 + bX + 1$ să se descompună în produsul a două polinoame de grad mai mic decît patru, cu coeficienți numere întregi.

99. Să se arate că polinomul $f = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n) - 1$, unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt numere întregi distincte, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

100. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ $(a, b, c \in \mathbf{Z})$ astfel încît $ac + bc$ este număr impar. Să se arate că acest polinom nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

101. Fie $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ numere complexe distincte și $c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că polinomul

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})...(X - a_{n+1})}{(a_i - a_1)(a_i - a_2)...(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})...(a_i - a_{n+1})}$$

este unicul polinom de grad $\leqslant n$ astfel încît

$$f(a_i) = c_i, \quad (\forall)\, i = 1, 2, ..., n + 1.$$

102. Fie $f_0, f_1, f_2, ..., f_n$ polinoame cu coeficienți complecși, astfel încît grad $f_i = i$, $(\forall) 0 \leqslant i \leqslant n$.

a) Dacă f este un polinom din $\mathbf{C}[X]$ astfel încît grad $f \leqslant n$, atunci există în mod unic numerele complexe $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ astfel încît $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$;

b) Dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ și $a \in \mathbf{C}$, să se arate că f este de forma

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{X - a}{1!} + \alpha_2 \frac{(X - a)^2}{2!} + ... + \alpha_n \frac{(X - a)^n}{n!}, \text{ unde } \alpha_i \in \mathbf{C}.$$

103. Fie $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ numere complexe distincte două cîte două și $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că există un unic polinom f de grad $\leqslant n$ și de forma

$$f = \alpha_0 + \alpha_1(X - a_1) + \alpha_2(X - a_1)(X - a_2) + ... + \alpha_n(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$$

astfel încît $f(a_i) = c_i$, $(\forall)\, 1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

104. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, un polinom de grad n, astfel încît $f(0), f(1), ..., f(n)$ sînt numere întregi. Să se arate că $(\forall)\, k \in \mathbf{Z}$, $f(k) \in \mathbf{Z}$.

Capitolul XIV
PERMUTĂRI

1. Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$ dacă:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze puterile $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$ în cazul că:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine permutarea $x \in S_4$ astfel încît

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{123}; σ^{210}; σ^{145}.

5. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{100}; σ^{151}; σ^{651}.

6. Să se determine numărul de inversiuni şi signatura pentru fiecare din permutările următoare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_4$, astfel încît $x^2 = u$.

8. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_7$ astfel încît $x^2 = u$.

9. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_3$ astfel încît $x^2 = u$.

10. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_4$ astfel încît $x^2 = u$.

11. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & i & 3 & j & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j astfel încît σ să fie o permutare pară.

12. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & i & 2 & 8 & j & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j astfel încît permutarea σ să fie impară.

13. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n & n+1 & n+2 \ldots 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 \ldots & 2n-1 & 2n & 2n-2 \ldots 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ. Să se determine n astfel încît σ să fie pară (respectiv impară).

14. Fie numărul de cinci cifre $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ unde: $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$. Să se calculeze suma $\sum_{\sigma \in S_5} \overline{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}a_{\sigma(5)}}$.

15. Fie numărul 64251. Făcînd toate permutările posibile ale cifrelor acestui număr obţinem 120 numere distincte. Al cîtelea număr în ordinea crescătoare din cele 120 de numere ocupă numărul 64251?

16. Fie numărul 45251. Cîte numere distincte obţinem permutînd toate cifrele acestui număr? Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

17. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ produsul

$$P_\sigma = \prod_{i=1}^{n} \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right) \text{ este maxim?}$$

(r şi s sînt două numere naturale $\geqslant 1$).

18. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este minimă?

19. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este minimă?

20. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este minimă?

21. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ astfel încît să avem

$$a_1 a_{\sigma(1)} < a_2 a_{\sigma(2)} < \ldots < a_n a_{\sigma(n)}.$$

22. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$ care au două inversiuni precum și numărul lor.

23. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziții de forma: (1 2), (1 3), (1 4),..., (1 n).

24. Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Capitolul XV

MATRICE

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = X^2 + 2X + I_3$; să se calculeze $f(A)$.

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = 2X^2 - 5X + I_2$, să se calculeze $f(A) + f(B)$ și $f(A + B)$.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

7. Fie matricea A:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x + 1 & e^{-x} + 1 \\ e^{-x} & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

8. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

10. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$.

13. Să se găsească matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încît $X^2 - 4X + 13I_2 = 0$ unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine u şi v astfel încît $AX = XA$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ unde a este un număr real nenul. Să se determine a astfel încît egalitatea $A^n = A$ să aibă loc pentru un anumit număr natural n.

16. Să se afle matricea A, astfel încît $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Să se afle matricea A, astfel încît $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} l & m \\ p & q \end{pmatrix}$ şi a, b, c, d sînt în progresie aritmetică atunci $m - l$, $p - m$, $q - p$ sînt în progresie aritmetică.

19. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se cer toate matricele X care au proprietatea $XA = AX$.

20. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} +1 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & -7 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

21. Fie $f(x) = x^2 - 4x + 4I_3$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se determine a, astfel încît $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, avînd elementele numere naturale. Să se determine A, astfel încît să avem egalitatea $(1\ 2\ 4) \cdot A = (3\ 1\ 2)$.

23. Fie A o matrice de tipul (4,3) avînd elementele numere naturale. Să se determine această matrice, astfel încît să avem egalitatea: $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

24. Fie A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că: *i)* $[A, A] = 0$; *ii)* $[A, B] = -[B, A]$; *iii)* $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$, $(\forall)\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

25. Cu notaţiile din problema **24** să se arate că dacă $A, B, C, \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ atunci $[[A, B]^2, C] = 0$.

26. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Dacă $AB = BA$ oricare ar fi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; să se arate că $A = aI_n$ unde I_n este matricea unitate.

27. Să notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea tuturor matricelor de tipul (m, n) în care toate elementele sînt numerele $+1$ sau -1 şi astfel încît produsul numerelor de pe fiecare linie şi din fiecare coloană să fie $+1$. Să se calculeze numărul elementelor mulţimii $\mathcal{M}$.

28. Oricare ar fi matricele $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ să se arate că

$$\sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} = 0.$$

29. Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ de ordinul n, notăm $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ pe care o numim *urma matricei A*. Să se arate că:

1) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall) \alpha \in \mathbf{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
4) $\mathrm{Tr}\,(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $(\forall) U$ inversabilă.

Capitolul XVI

DETERMINANȚI

1. Pornind de la definiția determinantului să se determine semnul următorilor termeni:

a) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$; b) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$; c) $a_{16}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53}a_{64}$; d) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$

2. Să se determine i și j astfel încît termenul $a_{12}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$ să intre cu semnul $+$ în dezvoltarea determinantului de ordinul 5.

3. Care dintre produsele următoare apar în dezvoltarea determinantului de ordinul 6.:

a) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{56}a_{62}$; b) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{51}a_{62}$; c) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}$.

4. Folosind numai definiția determinantului, să se determine coeficientul lui X^4 și X^3 în dezvoltarea următorului determinant:

$$\begin{vmatrix} 3X & -X & 1 & -1 \\ 1 & -2X & 2 & 1 \\ 3 & 2 & X & 4 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{vmatrix}$$

5. Folosind numai definiția determinantului, să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a & a \ldots a \\ 0 & 2 & -a & a \ldots a \\ 0 & 0 & 3 & -a \ldots a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & \ldots & \ldots n \end{vmatrix}$$

6. Folosind numai definiția determinantului, să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Folosind proprietățile determinanților să se demonstreze următoarele egalități:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd.$$

8. a) Dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul.

b) Să se arate că există determinanți nenuli de ordinul n cu $n^2 - n + 1$ elemente egale.

9. Să se arate că dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 1$ elemente nule, atunci determinantul este nul

10. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4\alpha^2 & -5\alpha & 4x \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$

11. Se consideră $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Să se dezvolte determinantul, punînd rezultatul sub o formă mai simplă.

12. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

13. Să se arate că $\begin{vmatrix} \dfrac{2}{1+x^2} + 2 & \dfrac{2}{1+x^2} + 5 & \dfrac{2}{1+x^2} + 3 \\ -2x & 1 - 5x & -3x \\ 4 & 7 + x & 5 \end{vmatrix} = 0.$

14. Se consideră expresiile $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, $g(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ $h(x) = \sqrt{1 - \sin x}$. Să se arate că oricare ar fi tripletul $a, b, c \in [0, \pi/2]$ avem:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0$$

15. Să se calculeze determinantul scriind rezultatul sub formă de produs:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

16. Să se arate că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ x_1 & 1 + x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots 1 + & x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

17. Dacă numerele $\overline{a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}}, \overline{a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n}}, \ldots, \overline{a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn}}$ sînt divizibile la N atunci și determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ este divizibil cu } N.$$

18. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$

19. Dacă $p < m$, $\begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & \dots & C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1.$

20. Fie ecuaţia algebrică $x^n + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n = 0$ unde $a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

ştiind că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei date.

21. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & a & h_b & h_c \\ 1 & b & h_c & h_a \\ 1 & c & h_b & h_a \end{vmatrix} = 0.$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi şi h_a, h_b, h_c sînt lungimile înălţimilor corespunzătoare.

22. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Să se arate că $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

23. Fie matricea pătratică de ordinul n, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ unde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Considerăm matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ unde $b_{ij} = a_{ij}$ oricare ar fi $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Să se arate că $\det B = \det A$.

24. Fie A, B două matrice pătratice de ordinul n, avînd elementele numere reale. Să se arate că

$$\det (A^2 + B^2) \geqslant 0.$$

25. Fie matricea de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

i) Să se arate egalitatea

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0.$$

ii) Dacă există un $k \geqslant 2$ astfel încît $A^k = 0$, atunci $A^2 = 0$.

26. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $a_{ij} \in \mathbf{R} (\forall) i, j = 1, 2, \dots, n$ şi

$$B = \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \\ b & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Să se arate că pentru $n = 2, 3$,

$$\det (A + B) \cdot \det (A - B) \leqslant (\det A)^2.$$

27. Fie $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{C})$. Notăm $M = AB$, $N = BA$.

Presupunem că $\det M \neq 0$, $\det N \neq 0$ şi $M^2 = kM$ unde $k \neq 0$. Să se determine $\det N$ în funcţie de k.

28. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \max(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.

29. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \min(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.

30. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = | i - j |$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.

31. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sînt -1 şi $+1$. Să se arate că:

a) $\det A$ este un număr par;

b) să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

32. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sînt 0 şi 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

Capitolul XVII

RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. Să se calculeze rangul matricelor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & -12 & 10 & -7 & -1 \\ 15 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 17 \\ 4 & 12 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -7 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Să se calculeze rangul matricelor următoare, pentru diferite valori ale parametrilor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha-1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 & -4 & 5 \\ \alpha & \alpha & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & 1-2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Cum se poate schimba rangul unei matrice, dacă se schimbă unul dintre elementele sale?

b) Cum se poate schimba rangul unei matrice, prin schimbarea elementelor unei linii? Dar prin schimbarea elementelor a k linii?

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Dacă A^* este matricea adjunctă a matricei A, să se arate că:

$$(A \cdot A^*)^n = (A^* \cdot A)^n = A^n(A^*)^n = (A^*)^n A^n, \quad (n \in \mathbf{N}).$$

5. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă este nenulă. În acest caz să se calculeze inversa sa.

6. Să se afle dacă matricele următoare sînt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{C};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & i \\ -i & -i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Să se afle dacă matricele următoare, de ordin n, sînt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

8. Să se arate că pentru o matrice nesingulară A de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

inversa sa $B = A^{-1}$ este de forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Fie A o matrice pătratică cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că, dacă există $k \geqslant 2$ astfel încît $A^k = 0$, atunci matricea $I - A$ este inversabilă şi avem:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

10. Fie A o matrice inversabilă cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

11. Fie A, B, C matrice astfel încît $AB = AC$. Sînt oare egale matricele B şi C? Dar dacă A este o matrice pătratică nesingulară?

12. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se numeşte involutivă dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se numeşte idempotentă dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

a) Dacă B este o matrice idempotentă, atunci matricea $2B - I_n$ este involutivă;

b) Dacă matricea A este involutivă, atunci matricea $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

13. Fie E_n matricea pătratică de ordin n ale cărei elemente sînt toate egale cu 1. Să se arate că:

a) $E_n^2 = nE_n$; b) $I_n - E_n$ este inversabilă şi avem.

$$(I_n - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} E_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n.

14. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) Există numerele $b_1, b_2, \ldots, b_m$ şi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel încît oricare ar fi $i, j (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ să avem $a_{ij} = b_i c_j$.

b) Matricea A se poate scrie ca produsul XY a două matrice X, Y, unde $x \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{C})$, iar $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{C})$.

15. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) există un număr α astfel încît $A^2 = \alpha A$;

b) dacă $\alpha \neq -1$, atunci matricea $I_n + A$ este inversabilă şi avem:

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A.$$

Să se deducă de aici, în particular, problema 5.

16. Fie A o matrice nesingulară şi $B = XY$, o matrice de rang 1 (vezi problema 6). Să se demonstreze că dacă matricea $A + B$ este nesingulară, inversa sa este dată de formula.

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1} B A^{-1},$$

unde $\alpha = YA^{-1}X$.

Presupunînd cunoscute matricele A^{-1}, X, Y, să se calculeze numărul înmulţirilor şi împărţirilor necesare pentru a trece de la A^{-1} la $(A + B)^{-1}$.

17. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n şi $\bar{A}$ matricea care se obţine adăugind la un element a_{ij} al lui A, numărul α. Să se arate că $\bar{A}$ este nesingulară şi să se determine inversa sa în funcţie de elementele matricei A^{-1} şi numărul α.

18. Fie A o matrice nesingulară de ordin n, iar $\bar{A}$ matricea obţinută adăugind $a \in \mathbf{C}$ la fiecare element al său. Să se arate că matricea $\bar{A}$ este inversabilă şi să se determine inversa sa în funcţie de elementele matricei A^{-1} şi numărul a.

19. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

f) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (3 \quad 2 \quad 1)$;

g) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{pmatrix} = (10 \quad 20 \quad 30)$;

h) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Capitolul XVIII
SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii cu ajutorul regulii lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13\alpha, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -26\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13\alpha; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 16\alpha, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 14\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 30\alpha, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = \alpha, \end{cases}$

unde α este un parametru real.

2. Să se afle valorile lui λ pentru care sistemele următoare au soluţii nenule şi în acest caz să se rezolve:

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x + (1+\lambda)y + z + t = 0, \\ x + y + (2+\lambda)z + t = 0, \\ x + y + z + t = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y + z - 2t = 0, \\ 2x - 5y - 4z + 2t = 0, \\ 5x + 3y - 3z + 4t = 0, \\ 2x - \lambda y - 2z = 0. \end{cases}$

3. Să se decidă dacă sistemele următoare sînt compatibile şi în acest caz să se rezolve;

a) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + y - 2z = \alpha, \\ x + y + z = 3, \\ x + 2y - 3z = 1; \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 3z = -1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + t = 10, \\ x + y - z - 2t = -8 \\ 5x + 5y - z - 4t = -4, \\ x + y + 3z + 4t = 28. \end{cases}$

4. Să se determine relaţia dintre parametrii a şi b, pentru care sistemul următor este compatibil`

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0, \\ x + y - 4ab = 0, \\ (a^2+1)x - (2ab+1)y + b = 0. \end{cases}$$

5. Să se rezolve sistemele următoare. Discuţie, după parametrii reali α şi β.

a) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ (\alpha+1)x_1 + (\beta+1)x_2 + 2x_3 = 7; \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha\beta x_2 + x_3 = \beta, \\ x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \beta, \\ (2-\alpha)x_1 + (1+\alpha)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \alpha\beta, \\ x_1 + (3-\alpha)x_2 + (2+\alpha)x_3 + 3x_4 = \beta, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8+\alpha)x_4 = (2+\alpha)\beta. \end{cases}$

6. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca suma a două soluţii ori produsul unei soluţii printr-un număr $\alpha \neq 1$ să fie din nou o soluţie a aceluiaşi sistem de ecuaţii liniare.

7. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca o combinaţie liniară dată de soluţii oarecare ale unui sistem neomogen de ecuaţii liniare, să fie din nou o soluţie a acestui sistem.

8. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_i = 0, \ 1 \leq i \leq n.$$

9. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

10. Dacă $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x = by + cz + du + ev, \\ y = cz + du + ev + ax, \\ z = du + ev + ax + by, \\ u = ev + ax + by + cz, \\ v = ax + by + cz + du \end{cases}$$

să aibă soluţii nenule.

11. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali

$$\begin{cases} \alpha x + ay + bz + ct = 0, \\ ax - \alpha y - fz + et = 0, \\ bx + fy - \alpha z - dt = 0, \\ cx - ey + dz - \alpha t = 0 \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

12. Se consideră sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} mx + y + z = 4, \\ x + 2my + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

b) Să se determine valorile lui m pentru care soluția sistemului (x, y, z) satisface condițiile $x + z > y$ și $x + y \geqslant z$.

c) Să se determine valorile lui m pentru care soluția (x, y, z) a sistemului are componente pozitive.

13. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice oarecare. Se numește *polinom caracteristic* al matricei A, polinomul $P_A(X) = \det(XI_n - A)$. Numărul λ se numește *valoare proprie* a matricei A dacă ecuația $Ax = \lambda x$ are soluții nenule. Orice soluție nenulă $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ a acestei ecuații se numește *vector propriu* al matricei A (corespunzător valorii proprii λ).

Să se arate că numărul λ este o valoare proprie a matricei A dacă și numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic.

14. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Fie $A \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii sînt: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$ și notăm $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$. Să se arate că $\det(f(A)) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$.

16. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute. Să se determine valorile proprii ale matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$;

17. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice. Să se arate că dacă x este un vector propriu, atunci x este, de asemenea, vector propriu al matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$;

Capitolul XIX

LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI

1. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ astfel,

$$x * y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că această lege de compoziție este asociativă, comutativă și are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

2. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $\circ$ astfel,

$$x \circ y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că această lege de compoziție este asociativă, comutativă și are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

3. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ prin

$$x * y = 2x + y, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietățile acestei legi de compoziție;

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$, să se calculeze: $a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$ și în general, $a_k = a_{k-1} * a$. Să se arate că pentru orice $n \geqslant 2$, număr natural, avem $a_n = (2^n - 1)\, a$.

4. Pe mulțimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziție $*$, punînd

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ pentru orice } x, y \in [0, +\infty).$$

a) Să se studieze proprietățile acestei legi de compoziție.

b) Să se arate că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de aceasta.

c) Să se afle x, dacă

$$2 * x = 3.$$

5. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $\perp$, prin:

$$x \perp y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se studieze proprietățile acesteia.

6. Pe mulțimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziție $\top$ astfel

$$x \top y = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Să se studieze proprietățile acesteia.

7. Fie $a > 0$ un număr real fixat și $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant x \leqslant a\}$. Definim pe A o lege de compoziție $\circ$ astfel

$$x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy/a^2}.$$

Să se demonstreze că:

i) legea de compoziție este asociativă;

ii) dacă $x, y, z \in A$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.

8. Pe mulțimea $M = \{1,2,3,4\}$ definim legea de compoziție $*$, prin $a * b = c \Leftrightarrow c$ este restul împărțirii lui a^b la 5.

a) Să se asocieze tabelul de definiție al acesteia;

b) Să se studieze proprietățile legii de compoziție.

9. Fie A o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție, notată multiplicativ, astfel încît;

i) dacă $a, b, c \in A$ și $ab = c$, atunci $ac = b$;

ii) $aa = a$, oricare ar fi $a \in A$.

Să se arate că:

a) oricare ar fi $a, b \in A$, ecuația $ax = b$ are soluție unică în A;

b) dacă A este finită și $ab \neq b$ oricare ar fi $b \neq a$, atunci aceasta are un număr impar de elemente.

10. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, definim legea de compoziție $*$, punînd:

$$x * y = ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c astfel încît legea să fie comutativă și asociativă.

11. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $*$, prin:

$$x * y = xy + ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

a) Ce relație există între a, b, c pentru ca legea să fie asociativă?

b) Legea $*$ este asociativă $\Leftrightarrow$ are element neutru.

c) Există elemente nesimetrizabile?

12. Pe mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale, definim următoarele două legi de compoziție:

$$m \perp n = \text{c.m.m.d.c. } \{m, n\} \text{ și } m \top n = \text{c.m.m.m.c. } \{m, n\}.$$

oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$.

Să se studieze proprietățile acestor legi de compoziție. Să se arate că:

$$m \perp (n \top p) = (m \perp n) \top (m \perp p),$$
$$m \top (n \perp p) = (m \top n) \perp (m \top p),$$

oricare ar fi $m, n, p \in \mathbf{N}$.

13. Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi definim următoarele două legi de compoziție:

$$a \top b = \max\{a, b\} \text{ și } a \perp b = \min\{a, b\},$$

oricare ar fi a $b \in \mathbf{Z}$.

Să se studieze proprietățile acestor legi de compoziție. Să se arate că:

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c),$$
$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

14. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim două legi de compoziție $*$ și $\circ$, punînd

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ și } x \circ y = x + y + 1, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietățile acestor două legi de compoziție.

b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x * y = -1, \\ x \circ y = 0. \end{cases}$$

15. Fie α, β unghiuri măsurate în radiani. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, definim legea de compunere $*$, prin:

$$x * y = x \cos^2\alpha + y \cos^2\beta \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$, avem:

$$(x * y) + z = (x + z) * (y + z) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}.$$

16. Fie M o mulțime cu n elemente. Cîte legi de compoziție se pot defini pe M? Cîte sînt comutative dintre acestea? Cîte au element neutru?

17. Pe mulțimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe, definim legea de compoziție $\top$, prin

$$z_1 \top z_2 = iz_1 \cdot z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$ este o parte stabilă față de legea $\top$, iar $\mathbf{C}^*$ cu operația indusă este un grup comutativ.

18. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, definim legea de compoziție $*$, punînd

$$x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}\setminus\{1\}$ este o parte stabilă față de legea $*$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operația indusă este un grup comutativ.

19. Pe mulțimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe definim legea de compoziție $\circ$, prin:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}\setminus\{1\}$ este o parte stabilă față de legea $\circ$, iar $\mathbf{C}_1$ cu operația indusă este un grup comutativ.

Să se calculeze în acest grup

$$i \circ i \circ i \circ i \circ i \text{ și } i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i.$$

20. Pe mulțimea $(0, +\infty)$ definim legea de compoziție $\perp$, prin:

$$x \perp y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in (0, +\infty).$$

Să se arate că mulțimea $A = (0, +\infty)\setminus\{1\}$ este o parte stabilă față de legea $\perp$, iar A cu operația indusă este un grup comutativ.

21. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $\circ$, punînd:

$$x \circ y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}\setminus\{1\}$ este o parte stabilă față de legea $\circ$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operația indusă este un grup comutativ.

22. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $*$, prin:

$$x * y = 2(x + y - 1) - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă față de legea $*$, iar $\mathbf{R}_2$ cu operația indusă este un grup comutativ.

23. Pe mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale definim legea de compoziție $\circ$, prin:

$$x \circ y = x + y - \frac{xy}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{Q}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă față de legea $\circ$, iar $\mathbf{Q}_2$ cu operația indusă este un grup comutativ.

24. Fie k un număr natural și $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

Să se determine toate numerele naturale k astfel încît $a^2 - kb^2 = 1$ și H să fie parte stabilă.

25. Să se arate că mulțimea $G = \left\{\begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{pmatrix} \mid x \neq 0, x^2 - 2y^2 = 1\right\}$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup comutativ.

26. Fie mulțimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulțirea matricelor este un grup necomutativ.

27. Există grupuri necomutative G, avînd proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in G$, $x^2y^2 = y^2x^2$?

28. Fie G un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$ astfel încît $a^{-1}ba = b^{-1}$ și $b^{-1}ab = a^{-1}$, atunci $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, $a^2 = b^2$ și $a^4 = b^4 = e$.

29. Fie G un grup, notat multiplicativ, astfel încît oricare ar fi $a, b \in G$ să avem $(ab)^2 = a^2b^2$. Să se arate că G este comutativ.

Să se studieze comutativitatea unui grup $(G, *)$ cu proprietatea că $(a * b)^3 = a^3 * b^3$, oricare ar fi $a, b \in G$.

30. Pe mulțimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ definim legile de compoziție $\top$, $\perp$, în modul următor:

dacă $x = (m, a)$ și $y = (m, b)$, atunci $x \top y = (m+n, ab)$ și $x \perp y = (mn, a + b)$.

a) Să se studieze proprietățile fiecăreia dintre legile definite.
b) Să se descrie elementele simetrizabile.
c) Să se studieze distributivitatea legii $\perp$ față de $\top$.

31. Fie n un număr întreg fixat și

$$G = \{a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z};\ n \mid a \text{ și } n \mid b\}.$$

Definim pe G următoarea lege de compoziție

$$(a, b) * (a', b') = (aa' + bb', aa' - bb'), \text{ oricare ar fi } (a, b), (a', b) \in G.$$

Să se decidă dacă G împreună cu această operație formează un grup.

32. Fie mulțimea

$$M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Să se arate că M împreună cu operația de înmulțire a matricelor este un grup comutativ, izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

33. Fie mulțimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulțirea matricelor este un grup, izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

34. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze puterile: $A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots$
b) Să se decidă dacă A este inversabilă.
c) Să se arate că mulțimea

$$G = \{A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$$

formează un grup izomorf cu grupul multiplicativ

$$H = \left\{\cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5},\quad 1 \leqslant k \leqslant 5\right\}.$$

35. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ astfel $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, n fiind un număr natural impar.

Să se arate că $(\mathbf{R}, *)$ este un grup. Mai mult dacă $(\mathbf{R}, +)$ este grupul aditiv al numerelor reale, să se arate că funcția

$$f: (\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}, *),\quad f(a) = \sqrt[n]{a}$$

este un izomorfism de grupuri.

36. a) Fie $G_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Să se arate că G_1 cu înmulțirea matricelor formează un grup comutativ.

b) Fie $G_2 = \{1, -1, i, -i\}$. Să se arate că G_2 cu înmulțirea numerelor formează un grup.

c) Fie $G_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Să se arate că G_3 cu compunerea permutărilor formează un grup comutativ.
d) Să se arate că grupurile G_1, G_2 și G_3 sînt izomorfe.

37. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Z}, +)$ și $(\mathbf{Q}, +)$ nu sînt izomorfe.

38. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Q}, +)$ și $(\mathbf{R}, +)$ nu sînt izomorfe.

39. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ şi $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sînt izomorfe.

40. Fie G o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie asociativă (notată multiplicativ). Să se arate că G este grup $\Leftrightarrow$ ecuaţiile $ax = b$, $ya = b$ au soluţii în G, pentru orice $a, b \in G$.

41. Fie G o mulţime finită pe care este definită o lege de compoziţie asociativă, notată multiplicativ. Dacă operaţia are proprietatea că, $xy = xz \Rightarrow y = z$ şi $yx = zx \Rightarrow y = z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$, atunci G este grup.

42. Fie $(\mathbf{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale, iar $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. Definim funcţia

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$$

prin $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Să se arate că:

a) f este omomorfism de grupuri;

b) $\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 1\}$;

c) $\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$;

43. Fie G mulţimea tuturor şirurilor $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, unde $x_i \in \mathbf{R}$. Definim pe G operaţia $*$, astfel:

Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$; $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in G$, atunci

$$x * y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots)$$

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Definim funcţiile f, g, h, k de la G la G, astfel:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_3, x_5, \ldots); \quad g(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_4, x_6, \ldots);$$
$$h(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots); \quad k(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)$$

Să se arate că f, g, h, k sînt omomorfisme de grup.

c) Să se arate că $f \circ h = g \circ k = 1_G$, $g \circ h = f \circ h = 0$.

44. Fie $(\mathbf{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi. Să se arate că:

a) dacă $n \in \mathbf{Z}$, funcţia $\varphi_n: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi_n(x) = nx$, este un omomorfism de grupuri;

b) orice omomrfism de grupuri de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$ este de acest tip;

c) există printre acestea doar două izomorfisme.

45. Fie G un grup comutativ şi să notăm cu H mulţimea

$$H = \{f \mid f: \mathbf{Z} \to G, f \text{ omomorfism de grupuri}\}.$$

Să se arate că funcţia

$$\varphi: H \to G, \ \varphi(f) = f(1)$$

este o bijecţie.

În particular, să se afle omomrfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$.

46. Fie $(\mathbf{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raţionale. Să se arate că:

a) dacă $q \in \mathbf{Q}$, funcţia $\psi_q: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $\psi_q(x) = qx$, este un omomorfism de grupuri;

b) Orice omomorfism de grupuri de la $\mathbf{Q}$ la $\mathbf{Q}$ este de acest tip.

47. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

48. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

49. Fie $\mathbf{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{m-1}\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ grupurile aditive ale claselor de resturi modulo m, respectiv n. Fie mulţimile:

$A = \{f \mid f: \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n, f \text{ omomorfism de grupuri}\}$ şi

$B = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in \mathbf{Z}_n, m\bar{a} = \bar{0}\}$. Să se arate că:

a) dacă $f \in A$, atunci $f(\hat{1}) \in B$;

b) funcţia $\varphi: A \to B$, $\varphi(f) = f(\hat{1})$, este bijectivă;

c) cîte omomorfisme de grupuri de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$ există?

50. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente şi $A_n \subset S_n$ mulţimea permutărilor pare de n elemente. Să se arate că A_n este un subgrup al lui S_n şi să se determine ordinul său.

51. Fie G un grup cu legea notată multiplicativ şi $H \subset G$ o submulţime finită nevidă a sa astfel încît, oricare ar fi $x, y \in H$ să avem $xy \in H$. Să se arate că H este un subgrup al lui G.

52. Fie H un subgrup al grupului G şi $a \in G$ un element oarecare. Să se arate că mulţimea $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ este un subgrup al lui G.

53. Fie G un grup şi H, K două subgrupuri ale sale. Atunci $H \cup K$ este subgrup $\Leftrightarrow$ $H \subset K$ sau $K \subset H$.

54. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că mulţimea

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \text{ oricare ar fi } x \in G\}$$

este un subgrup al lui G. ($Z(G)$ se numeşte centrul grupului G).

55. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $xy = yx$.

56. Fie S_n grupul tuturor permutărilor de gradul n. Dacă $b \geqslant 3$, să se arate că $Z(S_n) = \{e\}$ (e fiind permutarea identică).

57. Fie A_n grupul permutărilor pare de grad n. Dacă $n \geqslant 4$, să se arate că $Z(A_n) = \{e\}$.

58. Fie n un număr natural oarecare şi notăm cu

$$n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Să se arate că:

a) $n\mathbf{Z}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$;

b) orice subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este de acest tip.

59. Fie $m, n \in \mathbf{Z}$. Să se arate că:

a) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = \{mk + nl \mid k, l \in \mathbf{Z}\}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$. De asemenea, $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z}$ este un subgrup al lui $(\mathbf{Z}, +)$.

b) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = (m, n)\,\mathbf{Z}$ şi $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z} = [m, n]\mathbf{Z}$, unde (m, n) respectiv $[m, n]$ este *c.m.m.d.c.*, respectiv *c.m.m.m.c.*, al numerelor m şi n.

60. Fie G un grup finit cu legea de compoziţie notată multiplicativ şi H un subgrup al său. Pentru fiecare $a \in G$, notăm: $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Să se arate că:

i) Dacă $aH \cap bH \neq \varnothing$, atunci $aH = bH$;

ii) Oricare ar fi $a \in H$, aH şi H au acelaşi număr de elemente.

61. (Teorema lui Lagrange.) Fie G un grup finit. Numărul de elemente al lui G se numeşte *ordinul* grupului şi se notează ord G. Folosind problema precedentă, să se arate că dacă H este un subgrup al lui G, atunci

$$\text{ord } H \mid \text{ord } G.$$

62. Fie G un grup finit şi $a \in G$ un element oarecare. Se numeşte *ordinul* elementului a, cel mai mic număr natural $n \neq 0$ astfel încît $a^n = e$ (e fiind elementul neutru al lui G). Notăm ordinul elementului a prin ord (a). Să se arate că:

i) Pentru orice $a \in G$, există ordinul său.

ii) Dacă m este un număr întreg astfel încît $a^m = e$, atunci ord $(a) \mid m$.

iii) Dacă $\text{ord}(a) = n$, atunci mulţimea

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$$

este un subgrup al lui G.

iV) Oricare ar fi $a \in G$, atunci $\text{ord}(a) \mid \text{ord } G$.

63. Fie grupul abelian $(\mathbf{Z}_{120}, +)$. Să se găsească ordinul elementelor: $\widehat{25}, \widehat{30}, \widehat{55}, \widehat{45}, \widehat{80}$ ale acestui grup.

64. Fie G un grup multiplicativ, cu elementul neutru e.

a) Dacă $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, să se arate că G este comutativ.

b) Dacă G are proprietatea că $x^3 = e$, oricare ar fi $x \in G$, rezultă că G este comutativ?

65. Fie G un grup finit de ordin par. Să se arate că există în G un element care are ordinul 2.

66. Fie G un grup comutativ (legea de compoziţie fiind notată multiplicativ) de ordinul n. Să se arate că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul elementelor de ordinul 2 ale lui G (în cazul că nu există elemente de ordinul 2, ultimul produs se consideră egal cu elementul neutru e).

67. Folosind problema precedentă, să se demonstreze teorema lui Wilson: Dacă p este un număr prim, atunci:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

68. Folosind problema **61**, cap. IV, să se demonstreze teorema lui Fermat: Dacă p este un număr prim şi $a \in \mathbf{Z}$,atunci

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

69. Fie G un grup finit şi $a, b \in G$ două elemente oarecare astfel încît $ab = ba$. Dacă $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$ şi $(m, n) = 1$, atunci $\text{ord}(ab) = mn$.

70. Fie grupurile aditive $\mathbf{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{m-1}\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$ şi considerăm mulţimea $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n = \{(\bar{x}, \hat{y})\} \mid \bar{x} \in \mathbf{Z}_m, \hat{y} \in \mathbf{Z}_n\}$. Definim pe $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ operaţia definită prin:

$$(\bar{x}, \hat{y}) + (\bar{x}', \hat{y}') = (\overline{x + x'}, \widehat{y + y'}),$$

oricare ar fi $(\bar{x}, \hat{y}), (\bar{x}', \hat{y}') \in \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$. Să se arate că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Mai mult, dacă m şi n sînt prime între ele, atunci acest grup este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_{mn}$.

71. Fie G un grup finit de ordin p, unde p este un număr prim. Să se arate că G este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_p$.

72. Fie G un grup finit nu neapărat comutativ şi $x, y \in G$. Să se arate că $\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx)$.

73. *i*) Fie mulţimea $G = \{e, a, b, c\}$, înzestrată cu o lege de compoziţie, definită prin următorul tabel

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup comutativ (numit grupul lui Klein);

ii) Să se arate că orice grup cu 4 elemente este izomorf fie cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_4$, fie cu grupul lui Klein.

Capitolul XX

INELE ŞI CORPURI

1. Pe mulţimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ definim două legi de compoziţie, prin:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$(x, y)(x', y') = (xx', xy' + x'y),$$

oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Să se arate că în acest mod $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ devine un inel comutativ şi unitar.

2. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n. Să se determine mulţimea:

$$N = \{\hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}, \text{ există } k \in \mathbf{N} \text{ astfel încît } \hat{x}^k = 0\}.$$

Fie, de asemenea, $I = \{\hat{x} \mid x \in \mathbf{Z}_n, \text{există } k \in \mathbf{N} \text{ astfel încît } \hat{x}^k = \hat{x}\}$. Să se arate că $N \cap I = \{\hat{0}\}$.

3. Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$, mulţimea submulţimilor sale. Pe mulţimea $\mathcal{P}(M)$ definim două legi de compoziţie în felul următor:

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$
$$A \cdot B = A \cap B,$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un inel comutativ şi unitar. Mai mult, oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(M)$, avem $A + A = 0$ (elementul neutru la adunare) şi $A^2 = A$. Să se studieze cazurile particulare în care M este formată din 1, 2, respectiv 3 elemente.

4. Fie A un inel necomutativ unitar şi $a \in A$ un element astfel încît există $a' \in A$ cu $a'a = 1$ şi $aa' \neq 1$. Fie, de asemenea,
$M = \{b \in A \mid ba = 1\}$ şi $b_0 \in M$. Să se arate că funcţia $f: M \to M$, definită prin $f(b) = ab + b_0 - 1$ este injectivă, dar nu este surjectivă. În particular, să se deducă că M este infinită.

5. Dacă A este un inel astfel încît oricare ar fi $a \in A$, $a \neq 0$, există $b \in A$ cu $ba = 1$, atunci orice element nenul al lui A este inversabil (A este corp).

6. Fie A un inel comutativ cu unitate şi $f, g, \mathbf{Q} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A$, două omomorfisme de inele ($f(1) = g(1) = 1_A$). Dacă $f(n) = g(n)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, atunci $f = g$.

7. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ şi $\hat{a} \in \mathbf{Z}$. Să se arate că $\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow (a, n) = 1$.

8. Fie A un inel. Definim pe A legea de compoziţie $\perp$, punînd:

$$x \perp y = x + y - xy, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că legea $\perp$ este asociativă şi are element neutru.

Mai mult, dacă inelul A este unitar şi $1 - x$ ($x \in A$) este inversabil, atunci x este simetrizabil faţă de legea $\perp$.

9. Fie A un inel, pe care definim o nouă lege de compoziţie $*$, punînd

$$x * y = xy + yx, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că:

a) legea $*$ este comutativă, dar nu este asociativă;

b) legea $*$ este distributivă faţă de adunare;

c) $[(x * x) * y] * x = (x * x) * (y * x)$, oricare ar fi $x, y \in A$.

10. Să se arate că mulţimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbf{C} \right\}$$

împreună cu legile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor este un domeniu de integritate.

11. Fie inelul $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ şi $U(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}))$ grupul multiplicativ al matricelor inversabile ale sale. Fie, de asemenea,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} n & 12 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbf{Z}, \; n \in \mathbf{N}, \; n \leqslant 12 \right\}.$$

Să se determine cardinalul mulţimii $A \cap U(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}))$.

12. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate (adică, nu există $p \in \mathbf{Z}$ astfel încît $p^2 \mid d$). Să se arate că:

a) mulţimea $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe este un inel comutativ şi unitar;

b) mulţimea $I = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix} \middle| \; m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor formează un inel comutativ şi unitar;

c) cele două inele de la punctele precedente sînt izomorfe;

d) dacă $d' \in \mathbf{Z}$ este un alt număr liber de pătrate, atunci inelele $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ şi $\mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$ sînt izomorfe $\Leftrightarrow d = d'$.

13. Prin definiţie, un *inel boolean* este un inel în care $x^2 = x$, pentru orice element x (adică, orice element este idempotent). Să se demonstreze că într-un inel boolean înmulţirea este comutativă şi $x = -x$, oricare ar fi x din inel. Să se arate că dacă elementele u, x, y ale unui inel boolean sînt astfel încît $x = uxy$, atunci $x = ux$. Mai mult, dacă x şi y sînt elemente ale unui inel boolean şi $u = x + y + xy$, atunci $x = ux$ şi $y = uy$.

În general, să se arate că, pentru orice n elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui inel boolean, există un element u al inelului astfel încît $x_1 = ux_1$, $x_2 = ux_2, \ldots, x_n = ux_n$.

14. Fie A_1 şi A_2 două inele unitare şi fie adunarea şi înmulţirea pe $A_1 \times A_2$, definite astfel:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Să se arate că $A_1 \times A_2$, cu aceste operații, este un inel unitar care are divizori ai lui zero. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel în funcție de elementele inversabile ale inelelor A_1 și A_2.

Aplicație.

a) $A_1 = A_2 = \mathbf{Z}$; b) $A_1 = \mathbf{Z}$, $A_2 = \mathbf{Q}$; c) $A_1 = \mathbf{Z}_m$, $A_2 = \mathbf{Z}_n$.

15. Fie m, $n > 1$, numere naturale prime între ele și inelele

$$\mathbf{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\},\ \mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\},\ \mathbf{Z}_{mn} = \{\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{1}}, \ldots, \overline{\overline{mn-1}}\}.$$

Să se arate că:

a) Dacă $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, atunci $(\hat{x}, \bar{x}) = (\hat{y}, \bar{y})$;

b) Funcția $\varphi: \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, definită prin $\varphi(\bar{\bar{x}}) = (\hat{x}, \bar{x})$ este un izomorfism de inele (vezi pct. c) al problemei precedente).

16. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$.

17. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}_n$.

18. Să se descrie omormofismele de inel de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$.

19. Fie ecuația $\hat{a}x = \hat{b}$, cu $\hat{a}$, $\hat{b}$ din inelul $\mathbf{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n. Să se arate că:

i) Dacă $(a, n) = 1$, ecuația are o soluție unică;

ii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \nmid b$, ecuația nu are nici o soluție;

iii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \mid b$, atunci ecuația are d soluții distincte.

20. Fie A un inel comutativ și unitar, astfel încît să existe $u \in A$, $u \neq 0$ și $u \neq 1$, cu $u^2 = u$. Fie

$$A_1 = \{ux \mid x \in A\}.$$

Să se demonstreze că A_1 este un subinel al lui A (adică, oricare ar fi $x, y \in A$, atunci $x - y \in A_1$ și $xy \in A_1$) care are unitate. Să se demonstreze, apoi, că există un subinel A_2 al lui A astfel încît:

a) A_2 este unitar; b) fiecare element al lui A se exprimă ca $x_1 + x_2$ unde $x_i \in A_i$, $i = 1,2$; c) dacă $x_1 \in A_1$ și $x_2 \in A_2$, atunci $x_1 x_2 = 0$; d) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Să se arate că funcția

$$f: A \to A_1 \times A_2,\ f(x) = (x_1, x_2),\ \text{unde } x = x_1 + x_2,$$

este un izomorfism de inele.

21. Fie A un inel și $\mathbf{Z}$ inelul numerelor întregi. Considerăm $A_1 = \mathbf{Z} \times A$ pe care definim adunarea și înmulțirea astfel:

$$(n, a) + (n', a') = (n + n', a + a'),$$
$$(n, a) \cdot (n', a') = (nn', na' + n'a + nn'),$$

pentru orice $(n, a), (n', a') \in A_1$. Să se arate că:

a) A_1 este un inel unitar;

b) A este izomorf cu un subinel al lui A_1;

c) dacă A este inel comutativ, atunci A_1 este comutativ. Pentru $x, y \in A$, fie

$$x \circ y = x + y - xy.$$

Să se arate că operația $\circ$ este asociativă și că $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, pentru orice $x \in A$. Identificînd elementele corespunzătoare prin izomorfismul de la pct. b), să se arate că dacă $x \in A$, atunci x este simetrizabil în $(A, \circ)$ dacă și numai dacă $1 - x$ este simetrizabil în A_1.

22. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a)} \begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2}; \end{cases} \qquad \text{a)} \begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2}, \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3}, \end{cases}$$

cu coeficienți în inelul $\mathbf{Z}_{12}$.

23. Fie inelul $\mathbf{Z}[i] = \{m + ni \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$ (numit inelul întregilor lui Gauss). Definim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + ni) = m^2 + n^2.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[i]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[i]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$ (formula împărțirii cu rest);

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$.

24. Fie inelul $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}] = \{m + ni\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + ni\sqrt{2}) = m^2 + 2n^2.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1, 1\}$.

25. Fie inelul $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Defi nim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\sqrt{2}) = |m^2 - 2n^2|.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;

c) dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

26. Să se arate că $\mathbf{Z}_n$ este corp dacă și numai dacă n este prim.

27. Să se arate că orice inel integru finit este corp.

28. Să se arate că mulțimea

$$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$$

împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor reale este un corp comutativ.

29. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale.

30. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

31. Să se determine automorfismele f, ale corpului $\mathbf{C}$ al numerelor complexe, cu proprietatea că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

32. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate. Să se arate că:

a) mulțimea $\mathbf{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe este un corp comutativ;

b) mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor formează un corp comutativ;

c) cele două corpuri de la punctele precedente sînt izomorfe.

33. Fie K un corp comutativ și $K^* = K \setminus \{0\}$. Să se arate că grupurile $(K, +)$ și $(K^*, \cdot)$ nu sînt izomorfe.

34. Fie K un corp comutativ avînd proprietatea că, pentru orice $x \in K$ avem $x^2 + 1 \neq 0$. Definim adunarea și înmulțirea pe $K \times K$, punînd

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \times K$.

Să se arate că mulțimea $K \times K$, împreună cu aceste operații, este un corp comutativ, corpul K fiind izomorf cu un subcorp al acestuia. Mai mult, în acest corp ecuația $x^2 + 1 = 0$ are soluții.

Există corpuri K finite cu proprietatea că $x^2 + 1 \neq 0$, oricare ar fi $x \in K$?

35. Să se determine rangul matricei.

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{\alpha} & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{Z}_5).$$

Discuție după $\alpha \in \mathbf{Z}_5$.

36. Să se determine $\alpha \in \mathbf{Z}_3$ astfel încît matricea

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{\alpha} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\alpha} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z}_3)$$

să fie inversabilă. În acest caz să se afle inversa.

37. Fie corpul $\mathbf{Z}_3$ și mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbf{Z}_3 \right\}.$$

Să să arate că G împreună cu înmulțirea matricelor este un grup necomutativ. Cîte elemente are acest grup?

38. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \hat{2}x + y + z = \hat{4}, \\ x + y - z = \hat{0}, \\ \hat{4}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = \hat{1}, \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{1}, \\ -x - y + \hat{3}z = \hat{1}, \end{cases}$

cu coeficienți în $\mathbf{Z}_5$.

39. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (\hat{3}\alpha - \hat{2})x_1 + (\alpha - \hat{1})x_2 + (\alpha + \hat{4})x_3 + \alpha x_4 = \alpha - \hat{1}. \\ \alpha x_1 + (\alpha + \hat{4})x_2 + (\alpha - \hat{1})x_3 + (\alpha + \hat{3})x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + (\hat{2}\alpha + \hat{1})x_3 + (\hat{2}\alpha - \hat{1})x_4 = \hat{1}, \end{cases}$$

cu coeficienți în $\mathbf{Z}_5$.

40. Să se deducă în corpul $\mathbf{Z}_p$ ($p \neq 2$, număr prim) formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbf{Z}_p, \ a \neq 0).$$

41. Fie polinoamele:

a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$; b) $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$;

c) $X^5 + 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$; d) $X^4 - 1 \in \mathbf{Z}_7[X]$.

Să se decidă dacă polinoamele date sînt sau nu reductibile, iar în caz afirmativ să se descompună în factori primi.

42. Să se determine a astfel încît polinomul

$$\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X] \text{ să fie ireductibil.}$$

43. Să se arate că polinomul $X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbf{Z}_7[X]$ este reductibil pentru orice $a \in \mathbf{Z}_7$.

44. Fie K un corp comutativ. Notăm cu $GL_n(K)$ mulțimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din K. Să se arate că:

a) $GL_n(K)$ este un corp;

b) dacă K este un corp finit avînd q elemente, atunci $GL_n(K)$ are $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{n-1})$ elemente;

c) $GL_2(\mathbf{Z}_2)$ este izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

Capitolul XXI
PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Fie şirul de mulţimi şi funcţii:

$$\ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_4} A_3 \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0.$$

Dacă mulţimile A_i sînt finite oricare ar fi $i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, există un şir de elemente $(x_n)_{n\geqslant 0}$, unde $x_n \in A_n (n \geqslant 0)$, cu proprietatea că $f_n(x_n) = x_{n-1}$, oricare ar fi $n > 1$.

2. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$, o funcţie cu proprietatea că (1) $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in [0, 1]$.

Să se arate că $f \circ f = f$.

Să se dea exemplu de funcţie cu proprietatea (1) care să fie diferită de funcţia nulă şi de cea identică.

3. Fie a, b, α, β numere reale şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o funcţie oarecare. Dacă $\alpha^2 \neq \beta^2$ să se determine funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît să avem

$$\alpha f(a + x) + \beta f(b - x) = g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie a_0 un număr natural. Definim mulţimea

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \text{ unde } a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}.$$

Să se arate că mulţimea $A \setminus \mathbf{Q}$ este infinită.

5. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul

$$[(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1})^2] \text{ este impar.}$$

6. Să se determine mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ şi } \sqrt{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}\}.$$

7. Fie k un număr real. Să se determine valorile lui k, astfel încît ecuaţia

$$|x + 1| - |x - 1| = kx + 1$$

să aibă soluţie unică.

8. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, astfel încît $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$, să se arate că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

9. Dacă $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, să se arate că

$$\max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{a^2 - 3b}.$$

10. Să se arate că, dacă $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$, atunci $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$; m şi $n \neq 0$ fiind numere naturale.

11. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încît $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Să se arate că

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{n - k}.$$

12. Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural n, astfel încît

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leqslant n(x^4 + y^4 + z^4),$$

oricare ar fi numerele reale x, y, z.

13. Dacă $m < n$ sînt numere naturale nenule, să se calculeze

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \max(i, k).$$

14. Să se calculeze

$$S = \sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k}].$$

15. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît să avem

$$(m - 1)x^2 - mx - 2 > 0,$$

oricare ar fi $x > 2$, real.

16. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încît ecuaţia

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

să aibă o infinitate de soluţii.

17. Să se determine numerele reale a, b astfel încît ecuaţia

$$\sqrt[3]{(ax + b)^2} + \sqrt[3]{(ax - b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

să aibă soluţie unică.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \leqslant a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n}.$$

19. Să se demonstreze că

$$[\log_2 x - \log_2 [x]] = [\log_2 x] - [\log_2 [x]].$$

20. Fie numerele pozitive $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$, în progresie aritmetică crescătoare. Să se arate că

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}}.$$

21. Fie funcţia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ avînd proprietăţile următoare:

a) $f(2) = 2$; b) $f(mn) = f(m)f(n)$, oricare $m, n \in \mathbf{N}$; c) $f(m) > f(n)$, dacă $m > n$.

Să se arate că $f = 1_{\mathbf{N}}$.

22. Fie M o mulțime cu n elemente. Considerăm ecuațiile:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = M, \quad (1)$$

$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k = \varnothing, \quad (2)$$

unde $k \geqslant 1$ este un număr natural, iar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sînt submulțimi ale lui M.

Să se demonstreze, prin inducție, că numărul soluțiilor $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ale ecuației (1), respectiv ale ecuației (2), este egal cu $(2^k - 1)^n$ (vezi problema **34**, cap. X).

23. La o bibliotecă există două registre. Fiecare cititor înscrie în primul registru numărul de cititori pe care i-a întîlnit în sala de lectură și în al doilea înscrie numărul de cititori care au rămas după plecarea lui. Să se arate că la ora închiderii în cele două registre sînt înscrise aceleași numere, eventual în altă ordine.

24. Să se demonstreze că, dacă $n > 2$ este un număr natural, atunci 2^{2n} divide pe $\mathbf{C}_{2^n}^{2^{n-1}} - \mathbf{C}_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$.

25. Să se decidă care dintre numerele $5^{\sqrt{6}}$ și $6^{\sqrt{5}}$ este mai mare.

26. Să se arate că primele 100 de cifre după virgulă ale numărului $(\sqrt{26} + 5)^{101}$ sînt toate zero.

27. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \mathbf{C}_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

28. La o serbare participă b băieți și f fete. Se știe că orice grup de m băieți cunoaște cel puțin m fete ($m < b, f$). Să se arate că există posibilitatea ca fiecare băiat să danseze cu o fată pe care o cunoaște.

29. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $n \mid 2^n + 1$.

30. Să se determine toate numerele prime p, cu proprietatea că $p \mid 2^p + 1$.

31. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n, avem $n \nmid 2^n - 1$.

32. Să se arate că oricare ar fi $p > 2$, număr prim, există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $p \mid n \cdot 2^n + 1$.

33. Să se arate că șirul $\{2^n - 3\}_n$ are o infinitate de termeni care se divid cu 5, o infinitate de termeni care se divid cu 13, dar nici un termen al său nu se divide cu 5.13.

34. Fie a, b, c, d, e numere întregi. Să se arate că, dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$, atunci $3 \mid abcde$.

35. a) Fie a, b numere întregi cu $a \neq b$. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încît $(a + n, b + n) = 1$; b) Fie a, b, c numere întregi distincte. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $a + n$, $b + n$, $c + n$ să fie prime între ele două cîte două.

36. Să se arate că, dacă p este un număr prim $\geqslant 2$, atunci $p \mid \mathbf{C}_{2p}^p - 2$.

37. Să se determine numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_9$ astfel încît

$$3^{x_1} + 3^{x_2} + \ldots + 3^{x_9} = 19683.$$

38. Să se arate că dacă $n \geqslant 1$ numărul $2^{2^{n+1}} + 3$ nu este prim.

39. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci $11 \mid 2^{2^{4n+1}} + 7$.

40. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$29 \mid 2^{2^{6n+2}} + 13.$$

41. Fie polinoamele $p(X) = aX^2 + bX + c$ și $q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ cu coeficienți reali astfel încît oricare $x \in \mathbf{R}$, să avem $q(p(x)) = x$. Să se determine $p(q(x))$.

42. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi distincte, să se arate că polinomul

$$(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) + 1$$

nu se poate scrie ca produsul a două polinoame neunitare cu coeficienți întregi.

43. Fie polinoamele $P(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{m-1}$, $Q(X) = X^{u_1} + X^{u_2} + \ldots + X^{u_n}$, unde $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ sînt numere întregi.

Pentru $k \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, fie n_k numărul acelor i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, pentru care restul împărțirii lui a_i la m este k. Să se demonstreze că $P(X)$ divide $Q(X)$ dacă și numai dacă $n_0 = n_1 = \ldots = n_{m-1}$.

44. Fie $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom de grad $\geqslant 1$. Să se arate că mulțimea divizorilor primi ai numerelor $P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, este infinită.

45. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni al lui σ. Să se calculeze suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma).$$

46. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice cu 4 linii și 7 coloane astfel încît $a_{ij} \in \{0, 1\}$, oricare ar fi i, j. Să se arate că există $m < n$ și $p < q$ astfel încît $a_{mp} = a_{mq} = a_{np} = a_{nq}$.

47. Fie $n \in \mathbf{N}$ și $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Să se determine cel mai mare termen al dezvoltării binomului $(a + b)^n$.

48. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1327 & 1443 & 2899 \\ 4303 & 4174 & 1599 \\ 1716 & 1352 & 1704 \end{pmatrix}.$$

Să se decidă dacă $\det A$ este nenul.

49. Fie G un grup și H, K două subgrupuri ale sale. Să se arate că, dacă există $a, b \in G$ astfel încît $aH = bK$, atunci $H = K$.

50. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \}0\{$ și $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sînt izomorfe.

51. Fie G un grup astfel încît singurul automorfism al său să fie cel identic. Să se arate că G este comutativ și oricare ar fi $x \in G$, $x^2 = e$.

52. Fie H un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ al numerelor raționale. Să se arate că, dacă $\mathbf{Q} = H + \mathbf{Z}$ (unde $H + \mathbf{Z} = \{h + n \mid h \in H, n \in \mathbf{Z}\}$), atunci $H = \mathbf{Q}$.

53. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încît $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

54. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încît $a^2 = e$, $aba^{-1} = b^n$, unde $n \geqslant 2$ este număr natural.

Să se arate că

$$b^{n^2-1} = e.$$

55. Fie G un grup și $a, b \in G$, astfel încît $a^m = e$, $aba^{-1} = b^k$, unde $m \neq 0$ și $k \geqslant 2$ sînt numere naturale. Să se arate că $b^{k^m - 1} = e$.

56. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale considerăm *distanța* $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $d(x, y) = |x - y|$. Numim izometrie a lui $\mathbf{R}$ o funcție bijectivă $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Vom nota cu Izom ($\mathbf{R}$) mulțimea izometriilor lui $\mathbf{R}$.

i) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\tau_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\tau_a(x) = x + a$. Să se arate că τ_a este o izometrie (care se numește *translație*), iar $\tau_1^n = \tau_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

ii) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\varepsilon_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varepsilon_a(x) = a - x$. Să se arate că ε_a este o izometrie (care se numește *reflexie*), iar $\varepsilon_a^2 = 1_{\mathbf{R}}$, $\varepsilon_a \circ \tau_b = \tau_{-b} \circ \varepsilon_a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

iii) Să se arate că orice izometrie a lui $\mathbf{R}$ este o translație sau o reflexie;

iV) Să se arate că (Izom ($\mathbf{R}$), $\circ$) este un grup necomutativ.

Mai mult, dacă notăm $T = \{\tau_a\}_{a \in \mathbf{R}}$, să se arate că $(T, \circ)$ este un subgrup al grupului (Izom($\mathbf{R}$), $\circ$) și este izomorf cu grupul aditiv ($\mathbf{R}$, $+$) al numerelor reale.

57. În definiția unui inel (nu neapărat comutativ) cu unitate, să se arate că axioma de comutativitate a operației de adunare este o consecință a celorlalte axiome ale inelului.

58. Fie A un inel (necomutativ) cu unitate, iar $a, b \in A$. Să se arate că, dacă $1 - ab$ este inversabil, atunci și $1 - ba$ este inversabil.

59. Fie A un inel cu unitate și $a, b \in A$ astfel încît $a, b, ab - 1$ sînt inversabile. Să se arate că elementele $a - b^{-1}$ și $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ sînt inversabile. Mai mult, are loc egalitatea

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a.$$

60. Fie K și K' două corpuri comutative și $\varphi : K \to K'$ o aplicație astfel încît $\varphi(1) = 1$. Să se arate că φ este omomorfism de corpuri dacă și numai dacă:

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, oricare ar fi $x \in K$, $x \neq 0$.

61. Fie H mulțimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se arate că H, înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor, este un corp necomutativ. Mai mult, ecuația $x^2 + I_4 = 0$ are o infinitate de soluții în H.

62. Fie $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$) mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente din $\mathbf{C}$. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$), notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că:

i) $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$).

ii) Dacă $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$), atunci matricea $[A, B]\,[C, D] + [C, D]\,[A, B]$ comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$).

63. Fie A un inel cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

Partea a doua

INDICAȚII, SOLUȚII, RĂSPUNSURI

Capitolul I

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) falsă; e) adevărată; f) falsă; g) adevărată. **2.** a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) adevărată; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) adevărată; j) falsă; k) falsă. **5.** a) adevărată,; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) falsă; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) falsă. **6.** Se arată că propoziția $(\forall y)$ $(\exists x)$ $p(x, y)$ este adevărată și propoziția $(\exists x)$ $(\forall y)$ $p(x, y)$ este falsă. **7.** La fel ca în exercițiul 6). **8.** a) adevărată; falsă; adevărată; falsă; falsă; falsă; b) falsă; adevărată; adevărată; adevărată. **9.** a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă.

Capitolul II

MULȚIMI

1. a) $\{7\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-1, 2\}$; d) $\{-1\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; f) $\{1\}$; g) $\emptyset$; h) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$; i) $\{-1 + \sqrt{6}, 3\}$; j) $\emptyset$; k) $\{-2, 1, 3\}$; e) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; m) $\emptyset$; n) $\{0, 3\}$; p) $\{1\}$; q) $[4, +\infty)$. **2.** $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. **3.** a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $E = \{3, 4\}$; **4.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$. **5.** $A = \{1, 2, 3, 9\}$; $B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. **7.** Sînt toate submulțimile mulțimii $\{b, d, e\}$. Deci în total sînt 8 submulțimi. **8.** $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. **9.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; **10.** $X = \{3, 5, 7, 9\}$ și $X = \{3, 5, 7, 8, 9\}$. **11.** $X = \{4, 5, 6\}$. **12.** $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 4\}$. **15.** Sînt 9 soluții. **16.** Folosim complementara: $\complement_E \emptyset = \complement_E(X \cap Y) \Rightarrow E = \complement_E X \cup \complement_E Y$ și revenim la problema **15.** **17.** a) $A = \{-7, 1, 5, 13\}$; b) $B = \{3\}$. **18.** Scriem $x = 2n - 1 + \frac{n + 8}{3n + 1}$. Trebuie ca $3n + 1$ să dividă pe $n + 8$. Deci $3n + 1$ divide $3(n + 8) - (3n + 1) = 23$. Deci $3n + 1 = \pm 1$; $3n + 1 = \pm 23$. Obținem $A = \{-17, 7\}$. **19.** Avem $a^2 - a + 1 = ax + x \Rightarrow a^2 - a(1 + x) + 1 - x = 0$. Punem condiția că $\Delta = (1 + x)^2 - 4(1 - x) \geqslant 0$. Obținem că mulțimea dată deste egală cu $\left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3 + 21}{2}, + \infty\right)$. **20.** $x = 3 + \frac{6n - 2}{n^2 + 1}$. Dacă $n \geqslant 6$ avem $n^2 + 1 > 6n - 2$. Deci trebuie ca $n \leqslant 5$. Obținem $A = \{1, 5\}$

21. $y = 2 - x$ şi obţinem ecuaţia $|x| - 2|2 - x| = -1$, $A = \{(5, -3); (1, 1)\}$. **22.** Fie $d = (a, b)$; $a = da'$, $b = db'$ unde a' şi b' sînt prime între ele. $ab = d^2a'b' = 144a'b' \Rightarrow a'b' = 15 \Rightarrow a' = 1$, $b' = 15$; $a' = 3$; $b' = 5$; $a' = 5$, $b' = 3$; $a' = 15$, $b' = 1$. Deci $A = \{(12, 180); (36, 60), (60, 36), (180, 12)\}$. **23.** Scriem $(3y - (x + 1))(3y + (x + 1)) = 32$. Rezultă că $3y - (x + 1)$ poate lua valorile 1, 2, 4. Deci $3y + (x + 1)$ ia valorile 32, 16, 8. Mulţimea căutată este: $\{(6, 3), (1, 2)\}$. **24.** Este intervalul $(-3, -2)$. **25.** Scriem $(x - y)^2 + 2y^2 = 8$. Obţinem $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Mulţimea căutată este $\{(-2, -2), (2, 2)\}$. **26.** Scriem $3y = 1980 - x \Rightarrow y = 660 - \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - k$ unde $0 \leqslant k \leqslant 660$. Deci mulţimea dată are 661 elemente. **27.** $3y = 1980 - 4x \Rightarrow y = 660 - 4 \cdot \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - 4k$. Cum $y \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 4k \leqslant 660 \Rightarrow 0 \leqslant k \leqslant 165$. Deci mulţimea dată are 166 elemente. **28.** Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. Cum $A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$, avem singurele posibilităţi $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ sau $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$. Deci $m = -4$ sau $m = 2$. Rezultă $n = -3$, $p = 2$ sau $n = -3$ şi $p = -4$. **29.** $x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1} \Rightarrow a^2 + a(1 - x) + m - x = 0$. Cum $a \in \mathbf{R}$, atunci discriminantul acestei ecuaţii trebuie să fie $\geqslant 0$. Deci $\Delta = x^2 + 2x + 1 - 4m \geqslant 0$.

Discuţie: Dacă $m < 0$ atunci $\Delta > 0$ oricare ar fi x şi deci $A_m = \mathbf{R}$, $\forall m < 0$. Dacă $m = 0$, atunci $\Delta = (1 + x)^2 \geqslant 0$. Dar $x = -1$ nu este de forma $\frac{a^2 + a}{a + 1}$, $(a \in \mathbf{R})$. Deci $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$. Dacă $m > 0$ atunci $A_m = (-\infty, -1 - 2\sqrt{m}) \cup [-1 + 2\sqrt{m}, +\infty)$. Se constată uşor că intersecţia mulţimilor A_m cînd m parcurge numerele reale pozitive este vidă. **30.** Dacă mulţimea ar fi nevidă, există fracţia ireductibilă $x = \frac{p}{q}$ astfel încît $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$. Deci $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Cum a, b, c sînt impare, din această egalitate rezultă imediat că numerele p şi q trebuie să fie pare amîndouă. Dar atunci $x = \frac{p}{q}$ nu ar mai fi ireductibilă. **31.** Din egalitatea $x = 3n + 1 = 7m - 1$ se obţine că m este de forma $m = 3t + 2$. Deci $x = 21t + 13$. **32.** $x^2 - 4x + m^2 = 0$ are discriminantul $\Delta_1 = 16 - 4m^2$; $x^2 - mx + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta_2 = m^2 - 4$; $\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta_2 < 0$ şi în acest caz intersecţia este vidă; deci $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, $m = \pm 2$; şi în acest caz intersecţia este vidă. **33.** În primul caz se arată că $A = \{1, a, b\}$. În al doilea caz se arată că prima ecuaţie are o rădăcină dublă şi cea de-a doua are 2 rădăcini reale de forme diferite de rădăcina primei ecuaţii. **34.** Se foloseşte discriminantul celor două ecuaţii. **35.** Pentru $m = -2$, A are un singur element. **36.** Dacă $m \neq 1, 2$, A are 3 elemente; dacă $m = 1, 2$, A are 2 elemente. **37.** Cele două ecuaţii au discriminantul strict pozitiv şi nu au nici o rădăcină comună. **38.** Dacă -1 este rădăcină, avem $m = -3$; dacă 1 este rădăcină, avem $m = -\frac{1}{3}$. **39. 40. 41. 42.** Se studiază semnul rădăcinilor. **43.** Notăm $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\}$. Se studiază cazurile: 1) $A = \emptyset$, adică $a^2 < b$; atunci

$A - B = \emptyset$. 2) A are un singur element x_1; atunci este necesar şi suficient ca $x_1 \in B$. Se obţin pentru (a, b) soluţiile $(0, 0)$; $(1, 1)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; 3) A are două elemente; deci B trebuie să aibă aceleaşi elemente. Se obţin condiţiile $b^2 > a$, $a^2 > b$ şi $a = b$. **44.** $X = (A - B) \cup (B - A)$.

Capitolul III

FUNCŢII

1. Sînt 6 funcţii injective. **2.** Sînt 9 funcţii. **3.** 12 funcţii. **4.** Se înlocuieşte x cu $1 - x$ şi se obţine un sistem de ecuaţii care rezolvat dă $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$. **5.** Facem $y = x$ şi $f(2x) - f(0) = 4x^2$. Punem $f(0) = a$ şi înlocuim x cu $\frac{x}{2}$ şi avem $f(x) = a + x^2$. **6.** Se face $y = 1$ se obţine că f este o funcţie constantă. **7.** Se face $x = 0$ şi $x = n$ şi se obţine o contradicţie. **8.** Nu există. **9.** $m = \frac{5}{12}$, $n = \frac{11}{12}$. **10.** Nu există. **11.** Se înlocuieşte x cu $-x$ şi se obţine $4f(-x) + 3f(x) = c|x|$. Se formează sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 4f(x) + 3f(-x) = c|x| \\ 3f(x) + 4f(-x) = c|x| \end{cases}. \quad \text{Se obţine } f(x) = \frac{c}{7}|x|.$$

12. $f(x) = x$; $f(x) = -x + b$, $b \in \mathbf{R}$.

13. $f^n(x) = a^nx + (a^{n-1} \cdot b + a^{n-2}b + \ldots + ab + b)$.

14. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geqslant 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$; $\quad g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geqslant 2, \\ x + 3, & x < 2, \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geqslant 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$; $\quad g(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 2, \\ -x + 3, & x < 2. \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1 \\ 2, & x < 1 \end{cases}$; $\quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 2, \\ 4, & x < 2. \end{cases}$

16. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$ $\quad (g \circ f)(n) = n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

17. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 8, & x \leqslant -2 \\ 3x - 2, & -2 < x \leqslant 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = -3$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

18. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x < -1 \\ x^2 + 2x + 4, & x \geqslant -1 \end{cases}$; $\quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0, \\ x^2 + 4, & x \geqslant 0. \end{cases}$

19. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{2}, & x \leqslant 3 \\ x - 1, & x > 3 \end{cases}$; $\quad$ **20.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 4, \\ \frac{x + 2}{3}, & x < 4. \end{cases}$

21. $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+3, & x\leqslant 1\\ \dfrac{x+7}{2}, & x>1\end{cases}$; 22. a) f nu este injectivă deoarece $f(0)=f(5)$. b) f nu este injectivă deoarece $f(0)=f(7)$; c) $f(x)=x(x^2-3x+2)-4$ şi se vede că $f(0)=f(1)=f(2)$; d) $f(x)=x^{1979}(x^2-4)+1\Rightarrow f(0)=f(2)=f(-2)$. 24. $f(x)=x^3(2x+3)+4\Rightarrow f(0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow f$ nu este injectivă $g(x)=g(y)\Rightarrow x^3=y^3\Rightarrow x=y\Rightarrow g$ injectivă. 25. a) $m=2$; b) $f(1)=f\left(\frac{5}{2}\right)=2$, f nu este injectivă. 26. I) Dacă îl scriem pe a în baza 10 atunci b este ultima cifră; II) dacă $a=0$ atunci luăm $n_0=1$; $a=1$ luăm $n_0=1$; $a=2$ luăm $n_0=4$; $a=3$, $n_0=4$; $a=4$ luăm $n_0=2$; $a=5$, $n_0=1$, $a=6$, $n_0=1$, $a=7$, $n_0=4$; $a=8$, $n_0=4$; $a=9$, $n_0=2$. 27. Presupunem că $f\neq 1_A\Rightarrow(\exists)\ a\in A$, $f(a)=b$ cu $a\neq b$. Fie $c\in A$, $c\notin\{a,b\}$. Considerăm funcţia $g:A\to A$, $g(a)=a$, $g(b)=c$, $g(c)=b$ şi $g(x)=x$, $\forall x\notin\{a,b,c\}$; $(g\circ f)(a)=c$ şi $(f\circ g)(a)=b\Rightarrow g\circ f\neq f\circ g$. 28. a) $f([-1,1])=[-1,3]$, $f([-2,0])=[-3,1]$, $f((-2,1])=(-3,3]$, $f((1,2))=(3,5)$. b) $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<2\\ x-1, & x\geqslant 2\end{cases}$; $f([1,3])=f([1,2]\cup[2,3])=f([1,2])\cup f([2,3])=[1,2]$; $f([-1,3])=[1,4]$; $f([1,+\infty))=[1,+\infty)$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leqslant-2,\\ 2, & -2\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1;\end{cases}$ $f([0,1])=\{2\}$; $f([-2,1])=\{2\}$; $f([-3,2])=[2,4]$.

29. b) Presupunem f injectivă. Fie $b\in f(X)\cap f(Y)$; atunci $b\in f(X)$ şi $b\in f(Y)$. Există $x\in X$ şi $y\in Y$ astfel încît $b=f(x)=f(y)$. Cum f este injectivă, atunci $x=y$ şi deci $x\in X\cap Y$; deci $b\in f(X\cap Y)$. Deci $f(X)\cap f(Y)\subset f(X\cap Y)$. Cum $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$, obţinem egalitatea $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$. Reciproc, presupunem $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ oricare ar fi submulţimile X, Y ale lui A. Fie $x,y\in A$ astfel încît $f(x)=f(y)$. Notăm $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$. Deci $f(X)=\{f(x)\}$ şi $f(Y)=\{f(y)\}$ de unde obţinem $f(X\cap Y)\neq\emptyset$. Deci $X\cap Y\neq\emptyset$ şi deci $x=y$, adică f este injectivă. 30. a) Presupunem f injectivă. Fie $b\in f(\complement A')$. Atunci există $a\in\complement A'$ astfel încît $b=f(a)$. Deci $a\notin A'$. Dacă $b\in f(A')$ atunci există $a'\in A'$ cu $b=f(a')$. Cum f este injectivă, $a=a'$ şi deci $a\in A'$, contradicţie. Deci $b\notin f(A')$, adică $b\in\complement f(A')$. Deci $f(\complement A')\subset\complement f(A')$. Reciproc, fie $x\neq y$. Notăm $A'=\{x\}$. Deci $y\in\complement A'$ şi deci $f(y)\in f(\complement A')\subset\complement f(A')$ de unde $f(y)\notin f(A')$; cum $f(A')=\{f(x)\}$ obţinem $f(y)\neq f(x)$ şi deci f este injectivă. 31. a) Presupunem f injectivă. Fie $f_*(A')=f_*(A'')$ unde $A', A''\in\mathcal{P}(A)$. Avem $f(A')=f(A'')$. Fie $x\in A'\Rightarrow f(x)\in f(A')\Rightarrow f(x)\in f(A'')\Rightarrow(\exists)y\in A''$ astfel încît $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y\Rightarrow x\in A'\Rightarrow A'\subset A''$. Analog se arată că $A''\subset A'$. Deci f_* este injectivă. Fie $f(x)=f(y)$, $x,y\in A$. Dacă $A'=\{x\}$, $A''=\{y\}$, avem $f_*(A')=f_*(A'')$. Deci $A'=A''\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă. b) şi c) se demonstrează în mod similar. 32. a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 0\\ -2x+1, & x<0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty).\end{cases}$

Capitolul IV

NUMERE REALE

(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

8. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale, atunci $\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$. 9. Se arată că produsul este egal cu $\frac{[c^2-(a-b)^2][c-(a+b)]+abc}{abc}$. I) Dacă $c=-(a+b)$, numărătorul se reduce la $9abc$, şi deci produsul este 9. II) Dacă $c^2=(a-b)^2$, numărătorul se reduce la abc, şi deci produsul este 1. 10. Dacă $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$, rezultă că $3(a+b)(c+a)(b+c)=0$. Deci unul din factori este neapărat nul. Dacă $b+c=0$, atunci $c=-b$, de unde $c^{2n+1}=-b^{2n+1}$. Fiecare membru al egalităţii se reduce la a^{2n+1}. 11. II) Din $a^3+b^3+c^3=3abc$ rezultă $\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]=0$, de unde $a+b+c=0$ sau $a=b=c$. 12. I) Înmulţim membru cu membru inegalităţile: $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$, $b+c\geqslant2\sqrt{bc}$, $c+a\geqslant2\sqrt{ca}$; II) Din $a^2+b^2\geqslant2ab$, rezultă $(a^2+b^2)c\geqslant2abc$. Analog, avem $(b^2+c^2)a\geqslant2abc$, $(c^2+a^2)b\geqslant2abc$. Adunăm, membru cu membru, cele trei inegalităţi. III) Din $a^2-ab+b^2\geqslant ab$, multiplicînd ambii membri cu $a+b$, rezultă $a^3+b^3\geqslant(a+b)ab$. Analog, avem $b^3+c^3\geqslant(b+c)bc$, $c^3+a^3\geqslant(c+a)ca$. Adunăm membru cu membru cele trei inegalităţi. 13. Din $a+b+c=1$, deducem $\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $\frac{1}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}$, $\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$, de unde $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant3+2+2+2=9$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$. 14. Se observă că $\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c}\leqslant\frac{b+c}{4}$, $\frac{ca}{c+a}\leqslant\frac{c+a}{4}$ şi însumîndu-le membru cu membru se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$. 15. Deoarece $a+b=2$, rezultă $a-1=1-b$. Dacă $c=a-1=1-b$, atunci $a=1+c$, $b=1-c$, Inegalitatea de demonstrat devine $(1+c)^4+(1-c)^4\geqslant2$. 16. Din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi $\Leftrightarrow a+b-c>0$, $b+c-a>0$, $c+a-b>0$. Aşadar trebuie demonstrat că au loc cele trei inegalităţi de mai înainte $\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0\Leftrightarrow[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]<0\Leftrightarrow(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)<0\Leftrightarrow(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)>0$. 17. Din condiţia problemei rezultă $a\neq0$, $b\neq0$,

$c \neq 0,\ a+b+c \neq 0$. Se arată că, din $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, rezultă $(b+c)(c+a)(a+b)=0$. **18.** I) $\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\leqslant\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(a^{m+n}+b^{m+n})-(a^m+b^m)(a^n+b^n)\geqslant 0\Leftrightarrow(a^m-b^m)(a^n-b^n)\geqslant 0$. Pentru demonstrarea ultimei inegalități, se consideră separat cazurile: 1) m și n impare; 2) m și n pare; II) În particular, $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant$ $\leqslant\frac{a^4+b^4}{2}$ și $\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^4+b^4}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}$, de unde prin înmulțire membru cu membru, se obține inegalitatea cerută. **19.** Avem $(a^2-bc)^2+$ $+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\geqslant 0$ și $(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geqslant 0$, care ne dau $2\,abc\,(a+b+c)\leqslant a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, și $0\leqslant$ $\leqslant a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2$. Adunînd membru cu membru ultimele inegalități obținem inegalitatea din enunț. **20.** $\sqrt{(a+c)(b+d)}\leqslant\sqrt{ab}+$ $+\sqrt{cd}\Leftrightarrow(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geqslant 0$. Avem egalitatea dacă $ad=bc$. **21.** Ridicînd la pătrat ambii membri și făcînd calcule se obține inegalitatea echivalentă $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant 1-ab$, care ridicată din nou la pătrat este echivalentă cu $0\leqslant(a-b)^2$. Egalitatea are lor pentru $a=b$. **22.** I) $ab+ac+bc\leqslant$ $\leqslant a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$; III) Înmulțind cu 2 și trecînd totul în membrul al doilea obținem: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i-a_j)^2\geqslant 0$. **23.** Fie $m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}$ și $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}$. Atunci $m\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant M$, pentru orice i $(1\leqslant i\leqslant$ $\leqslant n)$, de unde $mb_i\leqslant a_i\leqslant Mb_i$, oricare ar fi i. Însumăm după i și găsim imediat inegalitățile cerute. **24.** Rezultă din problema precedentă. **25.** II) Fie s un număr real pozitiv care îl scriem ca sumă $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$; $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n>0$ (1). De asemenea, $s=\underbrace{\frac{s}{n}+\frac{s}{n}+\ldots+\frac{s}{n}}_{n\text{ (ori)}}$ (2). Să arătăm că dacă termenii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu sînt egali între ei, atunci produsul lor este mai mic decît al celor din descompunerea (2). Să presupunem că, $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Dacă $a_1>\frac{s}{n}$, atunci în mod necesar $a_n<\frac{s}{n}$. Fie diferențele $a_1-\frac{s}{n}$ și $\frac{s}{n}-a_n$ și să presupunem că $t=\frac{s}{n}-a_n<a_1-\frac{s}{n}$. Înlocuim în (1) pe a_1 cu a_1-t și pe a_n cu $a_n+t=\frac{s}{n}$. Suma termenilor este, de asemenea, egală cu s, adică $s=(a_1-t)+a_2+\ldots+a_{n-1}+\frac{s}{n}$, dar conform (I) produsul termenilor crește. Astfel am ajuns la un termen (ultimul) egal cu $\frac{s}{n}$. Se continuă procedeul pînă ajungem că toți termenii trebuie să fie egali cu $\frac{s}{n}$,

pentru a avea produsul maxim. **26.** II) $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+$ $+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac})=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+$ $+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}+\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ac}+$ $+\sqrt[3]{c^2})=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-$ $-\sqrt[3]{a})^2]\geqslant 0$. Celelalte inegalități rezultă din aceasta. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$; III) Conform exercițiului precedent avem: $a_1a_2\ldots a_n\leqslant$ $\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc cînd toate numerele sînt egale între ele. **27.** Este suficient să demonstrăm că $(a+a')(b+b')(c+c')\geqslant(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{a'b'c'})^3$. Avem $(a+a')(b+b')(c+c')=abc+a'b'c'+(abc'+acb'+bca')+(ab'c'+$ $+ba'c'+ca'b')$. Pe de altă parte, $(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{a'b'c'})^3=abc+a'b'c'+$ $+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2a'b'c'}+3\sqrt[3]{abca'^2b'^2c'^2}$. Acum folosim problema 26 pct. II). **28.** I) ,II). Se folosește problema 26. **29.** Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încît $p=a_1a_2\ldots a_n$. Din inegalitatea mediilor avem $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant$ $\geqslant n\sqrt[n]{p}$, iar $p=\underbrace{\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{p}\ldots\sqrt[n]{p}}_{n\text{ (ori)}}$. **30.** Rezultă din inegalitatea mediilor. **31.** Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a_i^2+a_i+1}{3}\geqslant a_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Înmulțind membru cu membru cele n inegalități, rezultă inegalitatea cerută. **32.** Din inegalitatea mediilor avem inegalitățile $\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{a_1}{a_2}+1\geqslant 3\cdot\frac{a_1}{a_2}$; $\frac{a_2^2}{a_3^2}+\frac{a_2}{a_3}+$ $+1\geqslant 3\cdot\frac{a_2}{a_3}$, ..., $\frac{a_n^2}{a_1^2}+\frac{a_n}{a_1}+1\geqslant 3\cdot\frac{a_n}{a_1}$, care înmulțite membru cu membru ne dau inegalitatea cerută. **33.** În inegalitatea $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, înlocuind numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prin $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ se obține inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a_1=a_2=\ldots=a_n$. **34.** Se folosește problema 25. **35.** Observăm mai întîi, că dacă $a\geqslant b>t>$ >0, atunci $(a+t)^2+(b-t)^2>a^2+b^2$. În particular rezultă că a^2+ $+b^2>\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2$, unde $s=a+b$. Fie acum (1) $a_1+a_2+\ldots+a_n=$ $=s$ și (2) $\underbrace{\frac{s}{n}+\frac{s}{n}+\ldots+\frac{s}{n}}_{n\text{ (ori)}}=s$. Printr-un raționament analog celui de la problema 25, ținînd seamă de inegalitatea de mai înainte, se obține că suma pătratelor termenilor din (1) este mai mare decît suma pătratelor termenilor din (2). **36.** Se folosește problema precedentă. **37.** Trecînd totul în membrul drept, inegalitatea devine: $\sum\limits_{i,j}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0$. Egalitatea are loc numai cînd toate parantezele sînt egale cu 0, adică $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

38. Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski din problema precedentă, pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ şi $\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}$. **39.** Aplicăm inegalitatea Cauchy-Bunikovski, pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ şi $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}$. **40.** Se ridică la pătrat ambii membrii şi se foloseşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **41.** Se aplică inegalitatea cunoscută $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. **42.** Se ridică la pătrat ambii membri. **43.** Se ridică la pătrat ambii membri şi se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **45.** Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, se consideră cazurile: $a \geqslant b$ şi $a < b$. **46.** Se consideră toate situaţiile de inegalitate care pot avea loc între a, b, c. **48.** Discriminantul ecuaţiei este $-(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \leqslant 0$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$. **49.** Dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b < \sqrt{a^2+b^2}$. Dacă $a = b$, atunci $a = b = \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^2+b^2}$. Dacă $a > b$, atunci $b < \frac{a+b}{2} < a < \sqrt{a^2+b^2}$.

50. I) $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = 1$; II) $x = \frac{1}{2}$; III) $x \in [0, 1]$; IV) $x = \pm 12$; V) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$; VI) $x \in \{-2\} \cup [2, +\infty)$. **51.** I) $x \in [1, 3]$; II) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$; III) $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$; IV) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; V) nu are soluţii; VI) $x \in \mathbf{R}$; VII) $x \in [-1, 3]$; VIII) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$; IX) $x \in (-\infty, 0]$; X) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **52.** a) $-5{,}000\ldots$; b) $2{,}8(3)$; c) $-0{,}750\ldots$; d) $0{,}000\ldots$; e) $2{,}(45)$; f) $-24{,}(904761)$; g) $-10{,}(5789473684210526\overline{31})$. **53.** a) $\frac{11}{3}$; b) $\frac{1\,706}{990} = \frac{853}{495}$; c) $-\frac{309}{99}$; d) $\frac{124}{9\,900} = \frac{31}{2\,475}$; e) $-\frac{42\,999}{9\,990}$; f) $\frac{4}{3\,000} = \frac{1}{750}$; g) $\frac{101}{9\,900}$. **54.** a) — c) raţionale; d) — k) iraţionale. Să demonstrăm, de exemplu că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ este iraţional. Presupunem prin absurd, că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \in \mathbf{Q}$, adică $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n > 0$, iar $(m, n) = 1$. Avem $3m^3 = 2n^3$, de unde $2 \mid m^3$. Dar atunci $2 \mid n$ şi deci $m = 2 \cdot m_1$. Înlocuind pe m în egalitatea $3m^3 = 2n^3$, se obţine $3 \cdot 2^2 \cdot m_1 = n^3$; deci $2 \mid n$. Dar $2 \mid m$ şi $2 \mid n$, contrazice faptul că $(m, n) = 1$. **55.** Să presupunem prin absurd că această fracţie este periodică, şi fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conţină şi cifra a. De aceea între două cifre a consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $p - 1$ zerouri, contradicţie. **56.** Deoarece în şirul numerelor naturale sînt numere care au oricîte zerouri consecutive (de exemplu, 10^n pentru orice n), putem face un raţionament analog cu cel de la problema precedentă. **57.** Presupunem prin absurd că în reprezentarea zecimală a unui număr iraţional, fiecare cifră se repetă de un număr finit de ori. Cum sînt doar 10 cifre, înseamnă că numărul are o scriere zecimală cu un număr finit de cifre după virgulă, adică este raţional; contradicţie. **58.** Dacă $1 \leqslant a < b < c \leqslant 9$, atunci numerele $0{,}ab0ab00ab000ab0000ab\ldots$, $0{,}abc0abc00abc000abc\ldots$ sînt iraţionale. **59.** $a = 1{,}73205$; $b = 1{,}73205010010001\ldots$ (vezi problema **55**).

60. Să arătăm că între a şi b este un număr raţional. Fie $m = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 > \frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a) > \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$, de unde $mb - ma > 1$. Deci $mb > [mb] > ma$. Notăm $k = [mb]$ şi deci $mb > k > ma$. Dacă $k > 0$, atunci $b > \frac{k}{m} > a$. Analog, dacă $k < 0$. Dacă $k = 0$, $0 \in (a, b)$. Fie acum, $r \in (a, b) \cap \mathbf{Q}$ şi $s \in (a, r) \cap \mathbf{Q}$, de unde $(r, s) \subset (a, b)$ cu $r, s \in \mathbf{Q}$. Oricare ar fi $m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$, $m \neq 0$ avem $\frac{m\sqrt{2}}{n} \not\in \mathbf{Q}$. Fie $\frac{p}{q} \in (0, s - r)$. Avem $0 < \frac{p\sqrt{2}}{2q} < s - r$ şi $\frac{p\sqrt{2}}{2q} \not\in \mathbf{Q}$. Deoarece $r \in \mathbf{Q}$, $r + \frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (r, s) \setminus \mathbf{Q}$, şi mai mult, $r + \frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (a, b) \setminus \mathbf{Q}$. **61.** Conform problemei **62** fie $b \in (a, \sqrt{2})$, respectiv $b \in (\sqrt{2}, a)$, un număr raţional. **62.** Să presupunem prin absurd că $\sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbf{Q}$; atunci $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \in \mathbf{Q}$, de unde, rezultă imediat că $\sqrt{15} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **63.** $\sqrt{m} - \sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, dacă m şi n sînt pătrate perfecte sau dacă $m = n$; $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbf{Q}$ dacă m şi n sînt pătrate perfecte. **64.** Presupunem prin absurd că $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$; atunci $a = (\sqrt{a})^2 \in \mathbf{Q}$; contradicţie. **65.** I) Fie $k = a + b$, $a \in \mathbf{Q}$, $b \notin \mathbf{Q}$. Presupunem prin absurd că, $k \in \mathbf{Q}$. Atunci $b = k - a \in \mathbf{Q}$, contradicţie; II) Fie $p = \frac{1}{\alpha}$. Presupunem prin absurd că $p \in \mathbf{Q}$; atunci $\alpha = \frac{1}{p} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **66.** Observăm că $a - b = (a + b) - 2b$; $a + 2b = (a + b) + b$. **67.** I) Conform problemei **63**, din $\sqrt{b} - \sqrt{b'} = a' - a \in \mathbf{Q}$, rezultă $b = b'$; II) Conform problemei **63**, din $\sqrt{b} + \sqrt{b'} = a' - a \in \mathbf{Q}$, rezultă că b şi b' sînt pătrate perfecte; contradicţie. **68.** $n^2 + 1 = k^2$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow (n - k)(n + k) = -1$, de unde $n - k = -1$ şi $n + k = 1$, adică $n = 0$. **69.** a) $n = 3$; b) $n = 4$. **70.** a) primul; b) primul; c) al doilea; d) primul; e) sînt egale; f) primul. **71.** a) $2{,}236 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}327$; b) $-2{,}237 \leqslant -\sqrt{5} < -2{,}236$; c) $0{,}400 \leqslant \frac{2}{5} < 0{,}401$; d) $-0{,}400 \leqslant -\frac{2}{5} < -0{,}399$; e) $3{,}316 \leqslant \sqrt{11} < 3{,}317$; f) $-3{,}317 \leqslant -\sqrt{11} < -3{,}316$; g) $0{,}538 \leqslant \frac{7}{13} < 0{,}539$; h) $-0{,}539 \leqslant -\frac{7}{13} < -0{,}538$; i) $1{,}181 \leqslant \frac{13}{11} < 1{,}182$; j) $-1{,}182 \leqslant -\frac{13}{11} < -1{,}181$. **72.** a) $x + y = 5{,}622\ldots$; b) $x + y = -0{,}298\ldots$. **73.** a) $xy = 1{,}509\ldots$; b) $xy = 6{,}866\ldots$. **74.** a) $4{,}1815\ldots$; b) $4{,}0599\ldots$; c) $2{,}1642\ldots$; d) $2{,}9027\ldots$; e) $0{,}4096\ldots$; f) $0{,}5098\ldots$; g) $5{,}3823\ldots$ **75.** a) $2{,}449\ldots$; b) $-3{,}872\ldots$; c) $1{,}984\ldots$; d) $-1{,}490\ldots$; e) $-5{,}916\ldots$; f) $-2{,}732\ldots$; g) $1{,}740\ldots$. **76.** Mai întîi, se aduc numerele la o formă mai simplă. Dacă notăm cu a, b, c, d, respectiv, cele patru numere de la a), b), c), d), atunci: a) $-5{,}1082 \leqslant a < -5{,}1081$; b) $-2{,}0000 \leqslant b < -1{,}9999$; c) $2{,}7534 \leqslant c < 2{,}7535$; d) $-0{,}0939 \leqslant d < -0{,}0938$. **78.** Ecuaţia dată se mai scrie $999(x + y) = 272(xy)$. Se arată că ecuaţia nu are soluţii întregi, dar are o infinitate de soluţii raţionale.

79. a) Inecuația este echivalentă cu $\frac{|a-b|}{|b+n|} < \frac{|a-b|}{b}$. Cum $a \neq b$, inecuația este echivalentă cu $b = |b| < |b+n| = b+n$; b) $\left|\frac{a+n_0}{n+n_0} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|b+n_0|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\varepsilon} < |b+n_0| \leqslant |b| + |n_0| \Rightarrow n_0 > \frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b|$. Putem lua $n_0 = \left[\frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b|\right] + 1$. **80.** $k = l(l+1)$, $l \in \mathbf{N}$. **81.** Fie $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = x \in \mathbf{Q}$. Atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x - \sqrt{c}$; deci $a + b + 2\sqrt{ab} = x^2 - 2x\sqrt{c} + c$, de unde $2\sqrt{ab} = x^2 + c - a - b - 2x\sqrt{c}$. Printr-o nouă ridicare la pătrat se obține $4x(x^2 + c - a - b)\sqrt{c} = (x^2 + c - a - b)^2 + 4x^2c - 4ab$. Dacă $x(x^2 + c - a - b) \neq 0$, atunci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Dacă $x(x^2 + c - a - b) = 0$, atunci avem una din situațiile: I) $x = 0$, atunci $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = 0$; II) $x \neq 0$, atunci $x^2 + c - a - b = 0$. În acest caz se obține $\sqrt{c} = 0$. Deci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Analog, se demonstrează că $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$. **82.** Fie $p, q \in \mathbf{N}$, $p \neq q$ și $x = \sqrt[n]{\frac{p}{\sqrt{2}}}$, $y = \sqrt[n]{\frac{q}{\sqrt{2}}}$. Atunci $x^n\sqrt{2}, y^n\sqrt{2} \in \mathbf{N}$ și $x \neq y$, iar $f(x) = f(y) = 0$. **83.** a) Ecuația este echivalentă cu $\frac{x-2}{3} \leqslant \frac{x+3}{4} < \frac{x-2}{3} + 1$ și $\frac{x-2}{3} \in \mathbf{Z}$. Rezultă $x \in \{11, 14, 17\}$; b) Avem condițiile $\frac{x-1}{3} \leqslant \frac{x^2-3x+1}{3} < \frac{x-1}{3} + 1$ și $\frac{x-1}{3} \in \mathbf{Z}$. Se obține $x = 4$. **84.** a) Presupunem prin absurd că $\left|a_k - \frac{1}{2}a_n\right| > \frac{1}{2}$, oricare ar fi k. Rezultă că oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_k \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $k = n$ rezultă $a_n > \varepsilon$, deci $a_n \in \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $|a_1| \leqslant \varepsilon$ rezultă $a_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \varepsilon$ rezultă că toți a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, se găsesc într-unul singur din cele două intervale; contradicție.; b) Fie $s_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_n, \ldots, s_n = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n$. Putem presupune $s_0 > 0$ și deci $s_n < 0$. Fie k astfel încît $s_k > 0$, $s_{k+1} < 0$ (dacă una din sume este nulă problema este rezolvată.) Dar $|s_k - s_{k+1}| < 2|a_k|$. Din $0 \in (s_k, s_{k+1})$ rezultă că una din cele două sume s_k, s_{k+1} are modulul $\leqslant |a_k| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$. **85.** Ridicînd la pătrat ambii membri ai primei egalități, obținem $a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$, $a, b, x, y \in \mathbf{Q}$. De aici rezultă $a = x + y$, $b = 4xy$, x și y fiind rădăcinile ecuației de gradul al doilea: $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$. Pentru ca x și y raționale să existe, este necesar și suficient ca $a^2 - b$ să fie pătratul unui număr rațional. A doua egalitate se tratează la fel. Avem: $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$. Aceasta se numește formula radicalilor compuși. **86.** Putem presupune $a > 0$, deci $c < 0$. Avem $0 = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a+b+c}{m+1}$, deci $a + b + c > 0$. Dar $a + b + c + \frac{c}{m} = a + b + \frac{m+1}{m}c = a + b - \frac{m+1}{m+2}a - b = \frac{1}{m+2}a > 0$. Avem $f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1) =$

$$= \frac{(a+b+c)(am^2 + bm^2 + bm + cm^2 + 2m + c)}{(m+1)^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(-am - bm - cm - c)}{(m+1)^2} =$$

$$= \frac{m}{(m+1)^2}(a+b+c)(-1)\left(a+b+c+\frac{c}{m}\right) < 0.$$

87. Dacă $a < b$, $|x-a| + |x-b| = \begin{cases} a + b - 2x, & \text{pentru } x \leqslant a, \\ -a + b, & \text{pentru } a \leqslant x \leqslant b, \\ 2x - a - b, & \text{pentru } x \geqslant b. \end{cases}$

Deci funcția atinge valoarea minimă $-a + b$, în fiecare punct al intervalului $[a, b]$. În general, putem presupune $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Dacă $n = 2k$ scriem $f(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k-1}|)$. Folosind cazul $n = 2$, se găsește în final că funcția își atinge valoarea minimă: $-a_1 - a_2 - \ldots - a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$, în fiecare punct al intervalului $[a_k, a_{k+1}]$. Pentru $n = 2k + 1$, scriem $f(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + \ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k+2}|) + |x - a_{k+1}|$. Rezultă că funcția își atinge valoarea minimă: $-a_1 - a_2 - \ldots - a_k + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_n$, în $x = a_{k+1}$.

88. a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{(n \text{ ori})} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2 + (n-1)} + \ldots + \frac{3n}{2n^2}\right] <$$

$$< \frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \ldots + \frac{3n}{2n^2}\right] = \frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}.$$

De aici, rezultă inegalitatea din dreapta relației de la pct a); b) Avem evident $\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. Apoi, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1} +$

$$+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{(n\text{ ori})}+\frac{1}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$ Pe de altă parte,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right]>$$

$$>\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\right]=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

89. Dacă $q=0$ sau $\sqrt{r}\in\mathbf{Q}$ este evident. Dacă nu, presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ $(q\neq0,\ \sqrt{r}\notin\mathbf{Q})$. Atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}\ (3qp^2+q^3r)$, de unde $p^3+3q^2pr=q$, $q(3p^2+q^2r)=0$. Deci $3p^2+q^2r=0$, contradicție. **90.** $\left\{a\mid a=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2},\ m,n\in\mathbf{Z},\ (m,n)=1\right\}$. **91.** Fie $\{x\}=x-[x]$. Atunci ecuația devine $x^3-x=3-\{x\}$, de unde $2<x^3-x\leqslant3$. Mai mult se arată că pentru $x\geqslant2$, $x^3-x>3$; pentru $x<-1$, $x^3-x<2$; pentru $x=-1$, $x^3-x=0<2$; pentru $-1<x\leqslant0$, $x^3-x<1$ și pentru $0<x\leqslant1$, $x^3-x\leqslant1$. Deci trebuie ca $1<x<2$, și prin urmare $[x]=1$. Ecuația inițială se scrie $x^3-1=3$, deci $x^3=4$; de unde $x=\sqrt[3]{4}$.

92. Avem $s=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\ldots+$ $+\frac{1}{1000\cdot1001}>\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)=\frac{1}{10}-$ $-\frac{1}{1001}>0{,}1-0{,}001=0{,}099$. De asemenea, $s<\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{10\cdot11}+\ldots+$ $+\frac{1}{999\cdot1000}=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{9}-$ $-\frac{1}{1000}<0{,}112-0{,}001=0{,}111$. Deci $0{,}099<s<0{,}111$. **93.** Dacă $a<1$, atunci $a<\sqrt{a}<1$. Presupunem prin absurd că în reprezentarea lui $\sqrt{a}$ nu sînt 100 de 9 consecutivi, adică $\sqrt{a}<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$. Ridicînd la pătrat ținem $a<1-2\left(\frac{1}{10}\right)^{100}+\left(\frac{1}{10}\right)^{200}$. Dar, $1-2\left(\frac{1}{10}\right)^{100}+\left(\frac{1}{10}\right)^{200}<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ și deci $a<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$, ceea ce contrazice faptul că în reprezentarea lui a sînt 100 de 9 consecutivi după virgulă. **94.** a) Fie $N_1=\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ și $N_2=$

$=\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$. $N_2-N_1=\frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha)^2(1+\beta+\beta^2)}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)}>0$. Deci $N_2>N_1$. b) Se demonstrează analog. **95.** Este suficient să demonstrăm pentru $a,b,c\in\mathbf{Z}$. Fie $a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}=0$. Separăm a și ridicăm la cub. Se obține că $p\mid a$. Împărțim egalitatea cu $\sqrt[3]{p}$ și analog deducem $p\mid b$. Continuăm în același mod și găsim $p\mid c$ ș.a.m.d. Deducem că oricare ar fi $k\in\mathbf{N}$, $p^k\mid a$, $p^k\mid b$ și $p^k\mid c$ și deci în mod necesar $a=b=c=0$. **96.** a) $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$, unde $0\leqslant\{x\},\{y\}<1$, sînt părțile fracționare ale sumelor x, respectiv y. Atunci $x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\}$. Cum $\{x\}+\{y\}\geqslant0$, rezultă că $[x]+[y]\leqslant x+y$ și $[x]+[y]\in\mathbf{Z}$. Deci $[x]+[y]\leqslant[x+y]$; b) $x=[x]+\{x\}$, unde $0\leqslant\{x\}<1$. Fie $[x]=qn+r$, unde $0\leqslant r\leqslant n-1$. Atunci $\frac{[x]}{n}=q+\frac{r}{n}$, $\left[\frac{[x]}{n}\right]=q$ și $x=qn+r+\{x\}=qn+r_1$, unde $r_1=r+\{x\}<n$. Deci, $\frac{x}{n}=q+\frac{r_1}{n}$, unde $0\leqslant\frac{r_1}{n}<1$, și $\left[\frac{x}{n}\right]=q=\left[\frac{[x]}{n}\right]$; c) Dacă $x-[x]<\frac{1}{2}$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$, și deci $[2x]=2[x]$ și $[2x]-[x]=2[x]-[x]=[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Dacă $x-[x]\geqslant\frac{1}{2}$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1$, $[2x]=2[x]+1$, și deci $[2x]-[x]=2[x]+1-[x]=$ $=[x]+1=\left[x+\frac{1}{2}\right]$; d) Fie $m=[x]$ și să presupunem că $m+\frac{l}{n}\leqslant x<$ $<m+\frac{l+1}{n}$, unde $0\leqslant l\leqslant n-1$. Deducem deci că $x+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+$ $+\left[x+\frac{n-l-1}{n}\right]+\left[x+\frac{n-l}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(n-l)m+l(m+$ $+1)=nm+l=n\left(m+\frac{l}{n}\right)=[nx]$. **97.** b) $n=4$; c) 2 cifre nu sînt în perioadă, iar 6 sînt în perioadă. **98.** $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{n^2+4n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

Se observă că numitorul fracției este multiplu de 3, pe cînd numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracției, adusă la forma ireductibilă, are factorii 2 și 3, de unde rezultă că fracția se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. **99.** Observăm mai întîi că este suficient să arătăm pentru $m=1$. a) Fie $\frac{1}{n}=0,(a_1a_2\ldots a_p)$, adică $\frac{1}{n}=\frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p-1}$, deci $10^p-1=n\cdot(a_1a_2\ldots a_p)$; b) Cu perioadă de o cifră sînt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, și $\frac{a}{9}$ unde $(a,9)=1$. Dacă, acum, perioada este bc, atunci fracția este $\frac{bc}{99}$. Ea ar putea fi simplificată, eventual, printr-un divizor al lui 99. La numitor rămîne un divizor al lui 99. Deci numitorul poate fi 3, 9, 11, 33, 99. Însă la $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{9}$ perioada are o cifră. Deci rămîn numai fracțiile de numitor 11, 33, 99, care au perioada de două cifre etc. c) Produsul a două numere cu perioadă simplă este un număr cu

perioadă simplă. Conform a), avem $10^k - 1 = \mathcal{M}n$ şi $10^{k'} - 1 = \mathcal{M}n'$, şi cum $(n, n') = 1$, rezultă $10^{(k, k')} - 1 = \mathcal{M}nn'$. Mai mult, (k, k') este cel mai mic număr cu această proprietate. **100.** Conform problemei **99** b), fracţiile cu două cifre la partea periodică sînt cele de numitor 11, 33, 99. Dacă la o astfel de fracţie înmulţim numitorul cu 2, 5 sau cu 10, obţinem fracţiile cerute în enunţ. **101.** Perioadele lui $\frac{1}{7}$ şi $\frac{1}{13}$ au cîte 6 cifre fiecare. Deci $\frac{m}{7} = \frac{p}{999\,999}$ şi $\frac{m}{13} = \frac{p'}{999\,999}$, de unde $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$. **102.** Perioada avînd $n-1$ cifre, ca resturi parţiale la împărţirea lui m la n, întîlnim toate numerele a, $1 \leqslant a \leqslant n-1$, eventual într-o altă ordine. Cînd apare ca rest un anume m, de aici încolo resturile parţiale sînt aceleaşi cu acelea obţinute prin împărţirea lui m la n.

Capitolul V

FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAŢII. SISTEME DE ECUAŢII

1. a) $f(x) = (x-1)^2 + 5$; b) $f(x) = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{57}{4}$; c) $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2 - 5$; d) $f(x) = 0{,}5(x - 0{,}2)^2 + 0{,}28$; e) $f(x) = -0{,}4(x - 1{,}25)^2 + 0{,}725$; f) $5\left(x - \frac{1}{20}\right) + \frac{79}{80}$; **2.** a) $x = \frac{1}{4}$, $V\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$; b) $x = -\frac{1}{2}$, $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{43}{4}\right)$; c) $x = \frac{3}{2}$, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{-39}{4}\right)$; d) $x = 1$, $V(1 - 2)$; e) $x = 0{,}1$, $V(0{,}1;\ 0{,}395)$; f) $x = \frac{1}{3}$, $V\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{36}\right)$. **3.** a) $y_{\max} = 0$; b) $y_{\min} = \frac{1}{2}$; c) $y_{\min} = -\frac{1}{4}$; d) $y_{\max} = 7$; e) $y_{\min} = \frac{14}{5}$; f) $y_{\min} = -4$.
4. a) Pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (1, 5)$ funcţia este negativă; b) Pentru $x \in (-3, -2)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ funcţia este negativă; c) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R}$; d) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) Funcţia este pozitivă pentru $x \in (1, 4)$; f) Funcţia este negativă pentru $x \in \left(0, \frac{25}{2}\right)$. **6.** a) $f(x) = |x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$; $x_1 = x_2 = 1$, $V = (1, 0)$ (fig. 1);

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, \text{ dacă } x \in [1 - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}], \\ x^2 - 2x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty); \end{cases}$

(fig. 2)

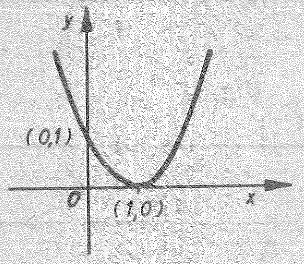

Fig. 1

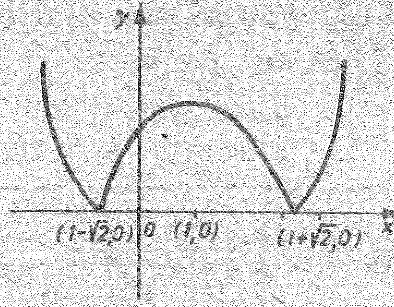

Fig. 2

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), \\ -x^2 + 5x + 1, \text{ dacă } x \in (0, 5); \end{cases}$ (fig. 3)

d) $k(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right), \\ -2x^2 + 3x - 1, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right); \end{cases}$ (fig. 4)

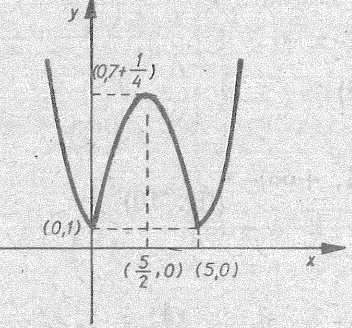

Fig. 3

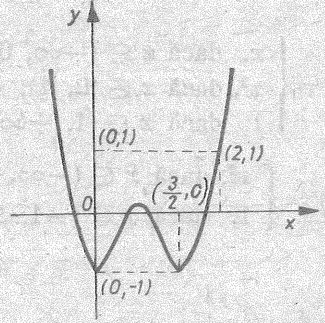

Fig. 4

e) (fig. 5)

f) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 25, \text{ dacă } x \in (-\infty, -4] \cup [4 +\infty), \\ 7, \text{ dacă } x \in (-4, -3] \cup [3, 4), \\ -2x^2 + 25, \text{ dacă } x \in (-3, 3); \end{cases}$

(fig. 6)

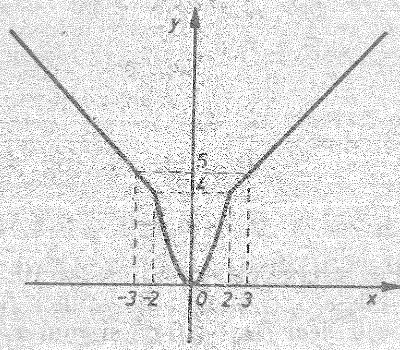

Fig. 5

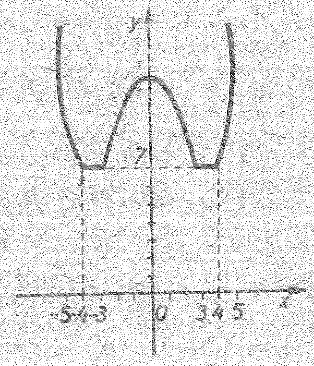

Fig. 6

g) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \\ x^2, \text{ dacă } x \in (0, 1); \end{cases}$ (fig. 7)

h) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (0, 1) \\ x^2, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty); \end{cases}$ (fig. 8)

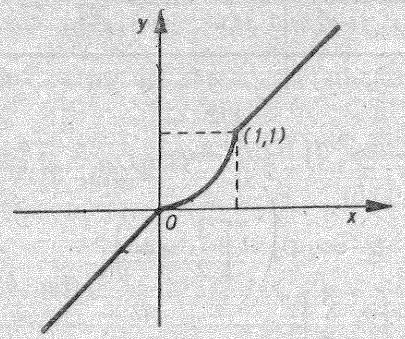

Fig. 7

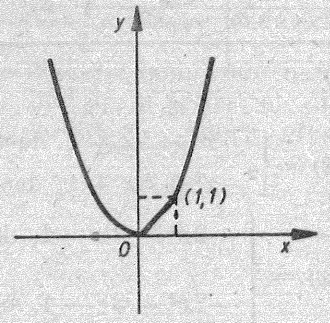

Fig. 8

i) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0], \\ x^2, \text{ dacă } x \in (0, 1), \\ 1, \text{ dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$ (fig. 9)

j) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1, \text{ dacă } x \in (-1, 1); \end{cases}$ (fig. 10)

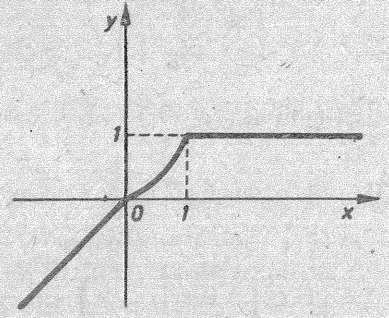

Fig. 9

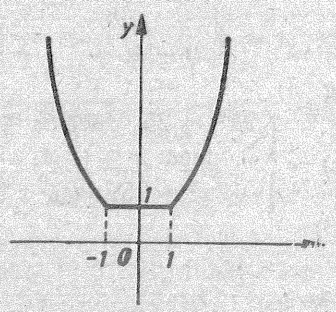

Fig. 10

k) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty), \\ 2x, \text{ dacă } x \in (0, 2); \end{cases}$ (fig. 11) l) (fig. 12)

7. $a = 1$, $c = -4$. **8.** $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. **9.** $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$. **10.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$. **11.** a) Pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $[0, +\infty)$ funcția este evident strict crescătoare. Fie $x_1 < 0$ și $x_2 > 0$, atunci $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 1 - x_2^2 - 1 = x_1 - x_2^2 < 0$ deci $f(x_1) < f(x_2)$ și cum $x_1 < x_2$, atunci funcția este strict crescătoare pe toată axa reală; b) Se demonstrează

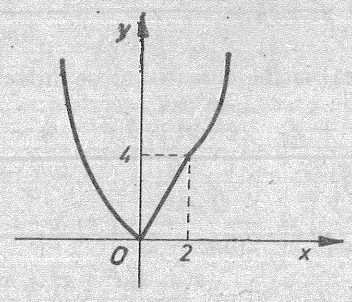

Fig. 11

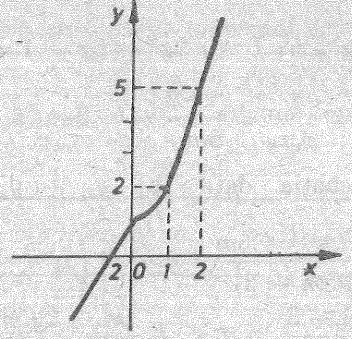

Fig. 12

ca la punctul a). **12.** Se procedează ca la problema **11.** **13.** Pentru injectivitate se ține cont că funcțiile respective sînt strict crescătoare sau descrescătoare.

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \sqrt{x - 1}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1], \\ 1 + \sqrt{x - 1}, \text{ dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_3^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \dfrac{1 - x}{2}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_4^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{2 - x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 2 - \sqrt{x - 2}, \text{ dacă } x \in [2, +\infty); \end{cases}$$

14. $a = -25$, $b = 10$, $c = 8$; $a = -1$, $b = 10$, $c = -16$. **15.** a) $m = -\frac{6}{7}$; b) $m = \frac{7}{3}$; c) -4; $-\frac{12}{13}$; d) 15; -3; e) -2; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $-2 \pm \sqrt{2}$; h) 0; i) 12; -3; j) $\frac{-5}{8}$; -1; k) 0; 2; **16.** Se ține seama de relații între rădăcini și coeficienți la ecuația de gradul II și se obține: a) m; b) $m + 1$; c) $m^2 - 2m - 2$; d) $\sqrt{m^2 - 4m - 4}$, dacă $x_1 \geqslant x_2$ și $-\sqrt{m^2 - 4m - 4}$ dacă $x_1 < x_2$; e) $m(m^2 - 3m - 3)$; f) $m^4 - 4m^3 - 2m^2 + 4m + 2$; g) $m^5 - 5m^4 + 10m^2 + 5m$; h) $\frac{m}{m + 1}$; i) $\frac{m^2 - 2m - 2}{(m + 1)^2}$; j) $\frac{m^3 - 3m^2 - 3m}{(m + 1)^3}$. **17.** Se observă că rădăcinile ecuației date sînt pozitive. a) $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $S^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}$, de unde $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}}$; b) $S = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, $S^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1 x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1 x_2}$, $S^4 = m^2 + 4\sqrt[4]{m^2 + 1}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}} + 6\sqrt{m^2 + 1}$, $S = \sqrt[4]{m^2 + 4\sqrt[4]{m^2 + 1}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}} + 6\sqrt{m^2 + 1}}$. **18.** a) $x^2 - 49 = 0$, b) $x^2 + 5x = 0$; c) $15x^2 - 34x + 15 = 0$; d) $14x^2 -$

$-17x+5=0$; e) $9x^2-6x-1=0$. **19.** a) $y_1+y_2=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{m+1}{5m-2}$, $y_1y_2=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{2}{5m-2}$. Sau se procedează astfel $x=\frac{1}{y}$ şi se înlocuieşte în ecuaţia dată. b) $y_1+y_2=+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-m+1}{2}-\frac{m+1}{5m-2}=$ $=\frac{-(m+1)5m}{2(5m-2)}$, $y_1y_2=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)=\frac{25m^2}{2(5m-2)}$; c) $y_1+y_2=$ $=\frac{4m-3}{2}$, $y_1y_2=-\frac{(m+1)(5m-2)}{4}$; d) $y_1+y_2=\frac{x_1x_2+x_2^2+x_1^2+x_1x_2}{x_1x_2}=$ $=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$, $y_1y_2=\frac{x_1+x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_2}=\frac{S^2}{p}=\frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$; e) $y_1+y_2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{m^2-18m+9}{10m-4}$, $y_1y_2=1$; f) $y_1+y_2=\frac{m^2-18m+9}{4}$, $y_1y_2=\left(\frac{5m-2}{2}\right)^2$; g) $y_1+y_2=\frac{-m+1}{2}\cdot\frac{m^2-28m+13}{4}$, $y_1y_2=$ $=\left(\frac{5m-2}{2}\right)^3$; h) $y_1+y_2=\frac{m^2-18m+19}{(5m-2)^2}$, $y_1y_2=\frac{4}{(5m-2)^2}$; i) $y_1+y_2=$ $=\frac{-(m+1)(m^2-28m+13)}{(5m-2)^3}$, $y_1y_2=\frac{8}{(5m-2)^3}$. **20.** a) $x\in(-\infty,-1)\cup$ $\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$; b) $x\in\mathbf{R}$; c) $x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6},\right.$ $\left.+\infty\right)$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\left(-\infty,\frac{-3}{4}\right)\cup(1+\infty)$; f) $\left(-1,\frac{4}{7}\right)$; g) $x\in$ $\in\left(2,\frac{7}{2}\right)$; h) $x\in(-\infty,-7)\cup(2,+\infty)$; i) $x\in(-6,6)$; j) $(1-\sqrt{5},-1)\cup$ $\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,1)\cup(1,1+\sqrt{5})$; k) $x\in\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$; l) $x\in(-\infty,-2)\cup$ $\cup\left(\frac{-1-\sqrt{6}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$; m) $x\in(-\infty,5-\sqrt{12})\cup$ $\cup(5+\sqrt{12},+\infty)$. **21.** a) $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$; b) $x=$ $=\frac{1}{3}$; c) $x\in\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$; d) $x\in(-\infty,-4)$; e) $x\in(-\infty\ \ -1-\sqrt{23}]\cup[1-\sqrt{11};-1+\sqrt{23}]\cup[1+\sqrt{11},+\infty)$. **22.** $\Delta_x<0$; $\Delta_x=-y^2+4y-m+4<0$. Se pune $\Delta_y<0$ unde Δ_y este discriminantul ecuaţiei $-y^2+4y-m+4=0$, deci $\Delta_y=-4m+32<0$; $m\in(8,+\infty)$. **23.** Se procedează ca la problema 22 şi se găseşte $m\in\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$. **24.** Se notează $x^2-4x+5=t$ şi se obţine $t\in[-1,0)\cup\left[\frac{4}{5},+\infty\right)$, de

unde $-1\leqslant x^2-4x+5<0$ sau $x^2-4x+5\geqslant\frac{4}{5}$ şi se obţine $x\in\mathbf{R}$. **25.** $f([0,2])=f([0,1)\cup[1,2])=[-1,0]$; b) $f([-2,4])=f([-2,1)\cup[1,4])=$ $=[-1,8]$; c) $f([1,6])=[-1,24]$; d) $f([-10,0])=[0,120]$. S-a ţinut cont că funcţia este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ şi strict crescătoare pe $(1,+\infty)$. **26.** $f([-4,0])=[3,35]$; b) $f([1,6])=f([1,2)\cup[2,6])=[-1,15]$; c) $f([3,5])=[0,8]$; d) $f([3,+\infty))=[0,+\infty)$; e) $f((-\infty,-1])=[8,+\infty)$; f) $f((-\infty,3])=f((-\infty,2)\cup[2,3])=[-1,+\infty)$. **27.** a) $\Delta=49$, $y_{\min}=-$ $-\frac{49}{4}$; $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{49}{4},+\infty\right)$; b) $\Delta=-3$, $\operatorname{Im} f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$; c) $\operatorname{Im} f=$ $=[3,+\infty)$; d) Se egalează fracţia cu m şi se obţine $x^2(1-m)-x(2+m)-$ $-(3+m)=0$). Se pune condiţia $\Delta>0$; $m\in\left[\frac{2+2\sqrt{13}}{-3},\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}\right]$ deci $\operatorname{Im} f=\left[\frac{2+2\sqrt{13}}{-3},\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}\right]$; e) $\operatorname{Im} f=\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$; f) $\operatorname{Im} f=(-\infty,-2-\sqrt{3}]\cup[-2+\sqrt{3},+\infty)$; g) Presupunem $a<b$ şi obţinem $\operatorname{Im} f=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$. Dacă $a=b$, $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}\setminus\{a\}$. **28.** Se pun condiţiile ca discriminantul de la numitor şi de la numărător să fie negativ şi se obţine $m\in(1,2)$. **29.** a) Se arată că discriminantul numitorului este negativ pentru orice $m\in\mathbf{R}$. b) Discriminantul de la numărător să fie negativ: $m\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$. **30.** Se găseşte $\operatorname{Im} f$ în funcţie de a, $\operatorname{Im} f=$ $=\left[\frac{-a+2}{3},\frac{3a+6}{3}\right]$ dacă $a\geqslant-1$ şi $\operatorname{Im} f=\left[\frac{3a+b}{3},\frac{-a+2}{3}\right]$ dacă $a<-1$: Se pun condiţiile $\frac{-a+2}{3}\geqslant-3$ şi $\frac{3a+b}{3}\leqslant2$ în cazul cînd $a\geqslant-1$ şi se obţine $a\in[-1,0]$. În cazul cînd $a<-1$ se pun condiţiile $\frac{3a+6}{3}\geqslant-3$ şi $\frac{-a+2}{3}\leqslant2$ şi se obţine $a\in[-4,-1)$. **31.** Fie $y=$ $=\frac{3x^2+mx+n}{x^2+1}$, se aduce la acelaşi numitor şi se obţine $(y-3)x^2-mx+$ $+y-n=0$ şi se pune condiţia $\Delta_x\geqslant0$; $\operatorname{Im} f=\left[\frac{n+3-\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2},\right.$ $\left.\frac{n+3+\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2}\right]$; se egalează aceste valori cu -3 respectiv 5 şi se obţine $n=-1$ şi $m=\pm4\sqrt{3}$. **32.** $a\in[1,+\infty)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **33.** a) $a=1$ atunci $c=\frac{3}{4}(2m^2+m)$ şi $b=|2m+1|$; $S=-|2m+1|$, $P=$ $=\frac{3}{4}(2m^2+m)$ şi ecuaţia este $x^2+|2m+1|x+\frac{3}{4}(2m^2+m)=0$. b) Dacă $m>-\frac{1}{2}$ se obţine $m\in\left(-2,-\frac{4}{11}\right)$ şi $\left(-2,-\frac{4}{11}\right)\cap$ $\cap\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)=\emptyset$. Dacă $m<-\frac{1}{2}$ se obţine $m\in(-\infty,-2)\cup$ $\cup\left(\frac{3-\sqrt{73}}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{3+\sqrt{73}}{2}\right)$ şi deci $m\in(-\infty,-2)\cup$

$\cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. **34.** a) $\Delta = m^2 - 6m + 1; \Rightarrow m_{1;2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. $S = \frac{2(m+1)}{m}$, $p = \frac{8}{m}$.

m	Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$
			$+$	
-1	$+$	$-$	0	$m = -1$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $\lvert x_1 \rvert = x_2$
			$-$	
0	$+$	$-$	$-$	$m \in (-1, 0)$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\lvert x_1 \rvert > x_2$
$3-2\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	rădăcini egale și pozitive
	$-$	$+$	$+$	nu are rădăcini reale
$3+2\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	rădăcini egale și pozitive
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	rădăcini reale distincte și pozitive

b) $m \in (3 - 2\sqrt{3}, 0) \cup (3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$.

35. $\begin{matrix} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{matrix}$ și $\begin{matrix} y_1 + y_2 = m + 3 \\ y_1 y_2 = 12m + 11 \end{matrix}$ și se obține $m \in [-1, 5]$.

36. Se obține $\frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha - \alpha^2} \leqslant 0$ deci $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ și $-1 \leqslant \frac{2\alpha + 2}{\alpha - \alpha^2}$ deci $\alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, 1)$; $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cup (0, 1) = (-\infty, -1]$ deci $\alpha \in (-\infty, -1]$. **37.** $m_1 = 3, m_2 = \frac{3}{2}$; b) $m \in (0, 2)$.

38. $f \circ g = \begin{cases} (5x-2)^2 + 6(5x-2), & \text{dacă } x < -\frac{1}{5}, \\ -2(5x-2) - 5, & \text{dacă } -\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1, \\ -2(x^2 - 3x + 4) - 5, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} (x^2 + 6x)^2 - 2(x^2 + 6x) + 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}), \\ 5(x^2 + 6x) - 2, & \text{dacă } x \in [-3 - \sqrt{10}, -3), \\ 5(-2x - 5) - 2, & \text{dacă } x \in [-3, +\infty). \end{cases}$

39. $f \circ g = \begin{cases} (4x-2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ (3x^2 - 2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \\ -5(3x^2 - 2) - 1, & \text{dacă } x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right); \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} 3(x^2 - 1)^2 - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \\ 4(x^2 - 1) - 2, & \text{dacă } x \in [-1, 0], \\ 4(-5x - 1) - 2, & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$

40. $f \circ g = \begin{cases} 4x^2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right); \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$

41. $y = \frac{m-1}{m}, m > 0, m = \frac{1}{1-y} \Rightarrow y < 1$.

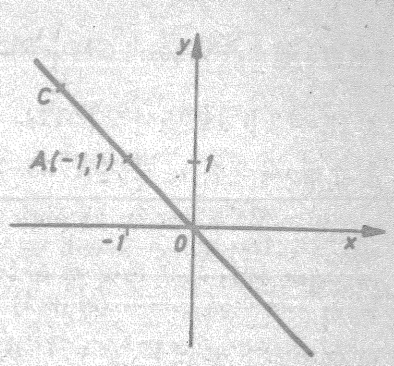

Fig. 13.

Pe semidreapta $|AO$ se găsesc vîrfurile parabolelor cu ramurile în sus și pe semidreaptă $|AC$ vîrfurile parabolelor cu ramurile în jos (fig. 13).

42. Se pune $y_{\min} > 0$, $y_{\min} = -m^2 + 3m - 2$ deci $m \in (1, 2)$. **43.** a) $x_{\min} = m - 2$, $y_{\min} = -m^2 + 5m - 6$ deci parabola este $y = -x^2 + x$; b) $y_{\min} = -m^2 + 5m - 1 < 0$ deci $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. **44.** $\Delta > 0$, $\Delta = 4(m^2 - m + 1) > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$. **45.** a) $x_{\min} = m - 1$, $y_{\min} = -m^2 + 3m - 1$; parabola este $y = -x^2 + x + 1$; b) Se arată $y_{\min}$ este mai mic decît $\frac{5}{4}$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. **46.** $x_V = \frac{2m-1}{2m}$; $y_V = \frac{-1}{4m}$; $x_V = y_V$ și $m = \frac{1}{4}$. **47.** $\Delta > 0$, $\Delta = 24m - 36$; $m \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 48. $\Delta > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$ și $\Delta = 36$. **49.** $\Delta = 0$, $\Delta = 4m^2 - 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $x_{1\min} = 1$, $x_{2\min} = -1$. **50.** $m = -1$. **51.** Se găsesc punctele de intersecție ale curbelor, $A(1, 2)$ și $B(3, 14)$. **52.** $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = -1$, $|AB| = 2$, $|DV| = 1$. Aria triunghiului $VAB = 1$ (fig. 14). Aria dreptunghiului care are lungimea $|AB|$ și lățimea $|DV|$ este 2. Deci aria parabolei cuprinsă sub axa Ox care este S va fi cuprinsă între 1 și 2. **53.** Ecuațiile să aibă o rădăcină comună; se găsește $m = -2$. **54.** Se arată că ecuația $x^2 - 3x - p = 0$ nu are rădăcini raționale. **55.** Se duc paralele la axa yy' prin punctele $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ (fig. 15). Aria se aproximează prin ariile a două trapeze dreptunghice și a două triunghiuri dreptunghice și aria dreptunghiului care are ca bază segmentul

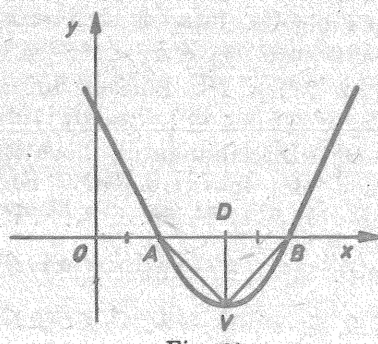

Fig. 14.

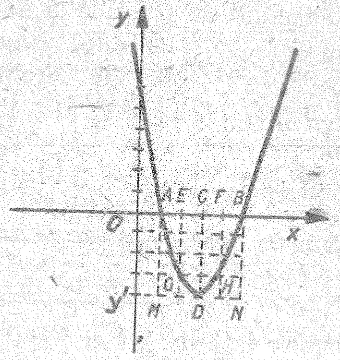

Fig. 15.

$|AB|$ şi înălţimea $|CD|$. **56.** $y_{\min} = \dfrac{m^2 - 10m + 9}{-4}$; $y_{\min} > -7$; $m \in (5 - 2\sqrt{11},\ 5 + 2\sqrt{11})$. **57.** $x_V = \dfrac{m+7}{m} = 1 + \dfrac{7}{m}$, $y_V = -14 - \dfrac{49}{m}$ deci $m = \pm 1$, $m = \pm 7$. **58.** Se pun condiţiile $a < 0$, $y_{\min} < 0$; $m - 1 < 0$, $y_{\min} = \dfrac{4m+5}{1-m} < 0$, se obţine $m \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{4}\right)$. **59.** I) $y_{\min} < 0$, $y_{\min} = -(m+1) < 0$ deci $m \in (-1, +\infty)$; II) $\Delta = 0$, $m = -1$; III) $x_{\min} = m - 1$; $y_{\min} = -(m+1)$ şi dreapta este $y = -x - 2$. **60.** a) $\Delta > 0$, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$: $\Delta = 4$; b) Se pun condiţiile $\Delta > 0$, $af(1) > 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 1$ se obţine $m \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$. **61.** Se pun condiţiile $a > 0$ şi $\Delta < 0$; $m \in \left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \Rightarrow m \in \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. $m \in (1, +\infty)$. **62.** Condiţiile care se pun sînt $\Delta < 0$ şi $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$. Se obţine $m \in (1, +\infty)$. **63.** Se pun condiţiile de la exerciţiul **62**; $m \in \left(-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **64.** Se pun condiţiile de mai sus; $m \in (1, +\infty)$. **65.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. **66.** Se pun condiţiile $\Delta < 0$, $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$ şi se găseşte $m \in [2, +\infty)$. **67.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(1, \dfrac{5}{3}\right)$. **68.** Se pun condiţiile $\Delta \leqslant 0$, $a < 0$; $m \in (-\infty, -1]$. **69.** Cele două ecuaţii au aceleaşi soluţii deci $\dfrac{m}{n-1} = \dfrac{3m-4}{n-1} = \dfrac{-6(m-1)}{3(2n-4)}$ şi se obţine $m = 2$ şi $n = \dfrac{5}{3}$. **70.** Se procedează ca la exerciţiul de mai sus; $m = 2$, $n = 1$. **71.** Pentru a fi îndeplinită condiţia ecuaţiile trebuie să aibă o rădăcină comună sau două. Două nu pot să aibă deoarece coeficienţii nu sînt proporţionali. Pentru prima condiţie $m_1 = -19$, $m_2 = 5$. **72.** Ecuaţiile au o rădăcină comună; $m_1 = -1$, $m_2 = -2$, se verifică că $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. **73.** $m \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \{2\}$. **74.** Rădăcinile au poziţiile următoare faţă de 1: $x_1 < 1 < x_2$, $1 < x_1 < x_2$, deci $m \in (-\infty, -2]$. **75.** Rădăcinile au poziţia faţă de $1: 1 < x_1 < x_2$; $m \in [-3, -2\sqrt{2})$. **76.** Trebuie $\Delta < 0$ sau $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-2, +\infty) - \{2\}$. **77.** $x_1 < x_2 < -1$; $m \in (2\sqrt{2}, 3]$. **78.** Poziţiile lui x_1 şi x_2 faţă de -1 sînt: $x_1 < -1 < x_2$; $x_1 < x_2 < -1$; $m \in (-\infty, 0]$. **79.** $\Delta < 0$ sau $-1 < x_1 < x_2$; $m \in (0, +\infty)$. **80.** Discriminantul ecuaţiei este pozitiv şi suma şi produsul rădăcinilor sînt pozitive. **81.** Se arată că $\Delta \geqslant 0$; $\Delta = [a^2 + (b-c)^2][a^2 + (b+c)^2]$. **82.** $x_1 < 2 < x_2$; $m \in \left(-\infty, \dfrac{-22}{3}\right] \cup (5, +\infty)$. **83.** $x_1 < 1 < x_2$; $m \in [-1, 1]$. **84.** Poziţiile rădăcinilor faţă de -1 şi 1 sînt: $-1 < x_1 < x_2 < 1$ sau $-1 < x_1 < 1 < x_2$ sau $x_1 < -1 < x_2 < 1$; $m \in [-1, +\infty)$. **85.** $-1 < x_1 < x_2 < 1$;

$m \in \left[\dfrac{-5}{4}, -1\right)$. **86.** $f(-1)\,f(1) < 0$; $m \in \left(-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$. **87.** Trebuie $\Delta < 0$ sau $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$. **88.** $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$ atunci $\Delta_3 \geqslant 0$, $\Delta_1 = b^2 - 4ac$; $\Delta_2 = b'^2 - 4a'^2c'^2$, $\Delta_3 = b^2b'^2 - 4aa'cc'$. Se obţine $b^2b'^2 - 4b^2a'c' - 4acb'^2 + 16aca'c' \geqslant 0$ rezultă că $b^2b'^2 - 4aa'cc' \geqslant 4a'c'b^2 + 4acb'^2 - 20aa'cc' \geqslant 0$ şi ţinînd cont de $b^2 - 4ac \geqslant 0$ şi $b'^2 - 4a'c' \geqslant 0$ se obţine $\Delta_3 \geqslant 0$. **89.** $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-\infty, -1)$. **90.** $0 < x_1 < x_2 < 1$; $m \in \left(\dfrac{5}{4}, 2\right)$. **91.** $\Delta < 0$ sau $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $m \in (-2, 3) \setminus \{-1, 2\}$. **92.** $5 < x_1 < x_2 < 7$; $5 < x_1 < 7 < x_2$; $x_1 < 5 < x_2 < 7$; $m \in [5; 5{,}4]$. **93.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $x = 0$, $y = 0$; $x = \dfrac{5}{9}$, $y = \dfrac{5}{27}$; c) $x = 1$, $y = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{9}{4}$; d) $x = \dfrac{-2}{3}$, $y = \dfrac{-13}{3}$; $x = 1$, $y = -1$. **94.** a) $x = 2$, $y = 1$; $x = -2$, $y = -1$; $x = \dfrac{7}{5\sqrt{7}}$, $y = \dfrac{19}{5\sqrt{7}}$; $x = \dfrac{-7}{5\sqrt{7}}$; $y = \dfrac{-19}{5\sqrt{7}}$; b) $x = 1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$, etc. c) $x = 3$, $y = 4$, $x = -3$, $y = -4$; d) $x = 1$, $y = 6$; $x = -1$, $y = -6$; e) $x = \dfrac{p}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$, $y = \dfrac{q}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$; f) $x = 1$, $y = 1$; g) $x = 2$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -2$; h) $x = 16$, $y = 4$; $x = y$, $y = 16$; i) $x = 2$, $y = -5$; $z = -4$; $x = -2$, $y = -1$, $z = 0$; j) $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$; k) $x = 2$, $y = -1$, $z = -3$; $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$. **95.** Se substituie x din ecuaţia a doua în prima şi se obţine $2y^2 - 2y(a - z) + z^2 + a^2 - z(1 + 2a) = 0$. Se pune condiţia că ecuaţia în y să aibă o singură soluţie reală deci $\Delta_y = 0$ şi se obţine: $-4(z^2 + a^2) + 8z(1 + a) = 0$. La fel $\Delta_z = 0$ şi se obţine $a = -\dfrac{1}{2}$; $z = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$. **96.** Se substituie z din prima ecuaţie în ecuaţia a doua şi se ajunge la $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$, adică $x = 1$ şi $y = 1$ şi $z = -1$. **97.** a) $x = 5$, $y = 7$; b) $x = 2$, $y = -3$; $x = 3$, $y = -2$; c) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{5}$; $x = \dfrac{1}{5}$, $y = \dfrac{1}{2}$; d) $x = 2$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 2$; e) Se descompun primii membri ai ecuaţiilor şi se formează patru sisteme de ecuaţii şi se obţine: $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -1$; $x = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$; f) $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$; g) $x = 1$, $y = 1$; h) Se împart cele două ecuaţii şi se ajunge la ecuaţia $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ şi se obţin soluţiile $x = 2$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 2$; i) $x = 0$, $y = 0$, $z = a$; $x = 0$, $y = a$, $z = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$. **98.** Se împarte prima ecuaţie la celelalte două şi se obţin ecuaţiile $y = 2x$, $z = 3x$. Se substituie în prima ecuaţie şi se găseşte $x = \dfrac{1}{\sqrt[10]{648}}$,

$-z^2 - a^2 + zz + 2az$
$-z^2 + (z + 2a)z - a^2 = 0$

$y = \frac{2}{\sqrt[10]{648}}$, $z = \frac{3}{\sqrt[10]{648}}$. **99.** Se ridică la puterea p şirul de rapoarte egale, se aplică proprietatea şirului de rapoarte egale şi se obţine: $\frac{x_k^p}{a_k^p} = \frac{b^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$ deci $x_k = \frac{a_k b}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}}$. **100.** a) Se rezolvă ecuaţia a doua ţinînd cont de prima şi se obţine $x = 1$, $y = 1$ etc.; b) Se ţine cont de cazurile $x < 1$, $y < 1$; $1 < x < 2$, $y < 1$; $x > 2$, $y > 1$; $x < 1$, $y > 1$; $1 < x < 2$, $y > 1$; $x > 2$, $y > 1$ şi se obţine $x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}$, $y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ etc. **101.** Se înmulţesc ecuaţiile între ele şi se obţine: $x_1 x_2 \dots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}$; se împarte ecuaţia obţinută cu fiecare ecuaţie în parte şi se obţine $x_i = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}}{a_i}}$. **102.** Scriem $2\sqrt{x_1 - 1} + 2 \cdot 2^2\sqrt{x_2 - 2^2} + \dots + 2n^2\sqrt{x_n - n^2} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$; $(\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x_2 - 2^2} - 2^2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n - n^2} - n^2)^2 = 0$. Se egalează fiecare termen cu zero. **104.** $A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2ax + a^2)$; $y_m = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **105.** Se aplică relaţia lui Stewart în ΔMBC, $MD = x$ (fig. 16). $MB^2 \cdot CD + MC^2 \cdot BD = MD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$. $AD = m$. $MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + 2BD^2$. Adunînd MA^2 la ambii membri, se obţine $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA^2 + 2MD^2 + 2BD^2$; $MA^2 + MB^2 + MC^2$ va fi minimă cînd $MA^2 + 2MD^2 = (m - x)^2 + 2x^2$ este minimă (BD = ct) $\Rightarrow x = \frac{m}{3} \Rightarrow MD = \frac{AD}{3}$. **106.** Se notează cu $d(A, M) = x$, $d(M, B) = 20 - x$ şi se găseşte $x_1 = 200$ m, $x_2 \simeq 10{,}5$ $\left(y_1 = \frac{100\,k}{x^2},\ y_2 = \frac{81\,k}{(20 - x)^2}\right)$ reprezentînd intensitatea luminoasă a sursei A respectiv B). **107.** O centrul cercului. Se notează $OM = x$, $MB = 10 - x$. Se găseşte $\mathcal{A} \leqslant 50\pi$ cm² (deci M coincide cu O (centrul cercului)). **108.** $R_1 = \frac{x}{2}$, $R_2 = \frac{20 - x}{2}$, $\mathcal{A} = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(20 - x)^2}{4}$ aceasta este minimă $\mathcal{A} \geqslant 50\pi$, pentru $x = 10$ (fig. 17).

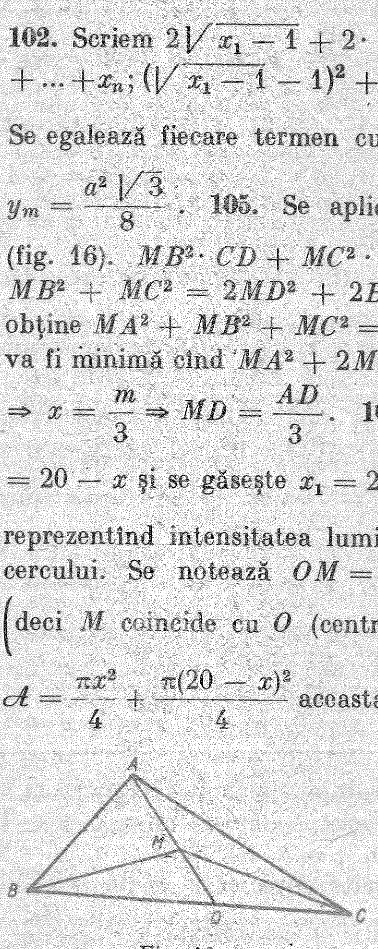

Fig. 16.

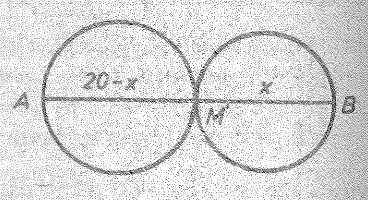

Fig. 17.

109. $\mathcal{A} = Ll = 60L - L^2$. $L^2 - 60L + \mathcal{A} = 0$, $L \in \mathbf{R}$; $\mathcal{A} \leqslant 900$ m² pentru $L = 30$, $l = 30$ m. **110.** Se notează $|BC| = a$, $|AD| = h$, $|PQ| = x$, $|MQ| = y$, $|AE| = h - y$ (fig. 18). $A_{MNPQ} = xy$ şi se obţine din asemănarea triunghiurilor $x = \frac{a}{h}(h - y)$. Atunci $ay^2 - ayh + Ah = 0$,

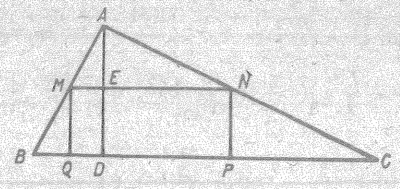

Fig. 18.

se pune condiţia ca $\Delta \geqslant 0$ şi se obţine $\Delta \geqslant \frac{ah}{4}$ şi aceasta pentru $y = \frac{h}{2}$ (tăierea se face la jumătatea înălţimii). **111.** $\mathcal{P} = 2L + 2l$, $\mathcal{A} = Ll$ şi se obţine $2l^2 - \mathcal{P}l + 162 = 0$, $L \in \mathbf{R}$, se pune condiţia ca $\Delta_l \geqslant 0$ şi se obţine $\mathcal{P} \geqslant 36$, $\mathcal{P} = 36$ pentru $l = 9$ şi dreptunghiul devine pătrat în acest caz. **112.** Se notează cu x, y minimul de zile în care poate transporta marfa prima maşină respectiv a doua maşină. Se obţine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ şi $2\,400\,x + 5\,400\,y = k$ (cantitatea de benzină măsurată). Se obţine $2\,400\,x^2 + 15\,000\,x = k(x - 5)$. Se pune condiţia ca $\Delta \geqslant 0$ şi se obţine k (minim) = 720 litri pentru $x = 12\frac{1}{2}$ zile şi $y = 8\frac{1}{3}$ zile. **113.** Notăm $AC = x$, atunci $BC = 7 - x$, $AD = y$ şi $BD = 5 - y$ ($D \in |AB|$, fig. 19); se găseşte $I = \frac{\sqrt{-24x^2 + 168x - 144}}{5}$ şi $\mathcal{A} = \sqrt{-6x^2 + 12x - 36}$. Aria este maximă adică $\mathcal{A} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ dacă $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ şi $I = \sqrt{6}$. **114.** Fie înălţimea AD (fig. 20). Notăm: $BD = x$, $BC = m$. Perimetrul este $2p$. Dacă S este aria atunci $S = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p}$. r va fi maximă cînd $S = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{x(m - x)m}}{2}$ va fi maxim. $x(m - x)m^2 = -m^2x^2 + m^3x$ va fi maxim pentru $x = -\frac{m^3}{-2m^2}$, $x = \frac{m}{2}$. $BD = \frac{BC}{2}$.

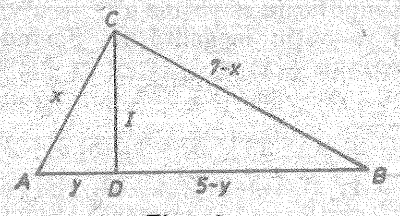

Fig. 19.

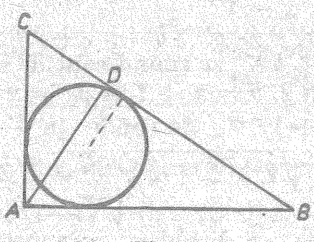

Fig. 20.

PUTERI ŞI RADICALI

1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{144}{121}$; c) $\frac{82}{3}$; d) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $\frac{(3x-2y)(a+b)}{a^2b^2+y}$; b) $\frac{xy(b-a)}{ab}$; c) $\frac{x+y}{x-y}$; d) $\frac{1}{a-1}$; e) $\frac{(b-a)^3+a^3}{(b-a)^4}$. **3.** a) $\frac{9}{74}$; b) $\frac{16}{9}$. **4.** $80\,xyz(x^2+y^2+z^2)$. **8.** $16[ab(a^2+b^2)-cd(c^2+d^2)]$. **11.** a) primul este mai mare; b) primul este mai mare; c) primul este mai mare; d) sînt egale; e) primul este mai mare. **13.** Dacă n este par funcţia nu este injectivă şi nici surjectivă; dacă n este impar funcţia este injectivă şi surjectivă. **15.** a) $|x+2|$; b) $||x|-3|$; c) $|-2x^2+3x-1|$; d) $||x|^2-3x+2|$. **16.** a) Dacă $x<-2$ suma este $-2x$; dacă $x\in[-2, 2]$ suma este 4; dacă $x>2$ suma este $2x$; b) Dacă $x<-3$ suma este -5; dacă $x\in[-3, 2]$ suma este $2x+1$; dacă $x>2$ suma este 5; c) Dacă $x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]\cup[1, +\infty)$ suma este $3x^2-2x+3$; dacă $x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ suma este $-x^2+4x+1$. **17.** Vezi exerciţiul **16.** **18.** a) $x\in[1, +\infty)$; b) $x\in\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$; c) $x\in\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\mathbf{R}$; f) $x\in\mathbf{R}$; g) $x\in(-\infty, 1]\cup[4, +\infty)$; h) $x\in(-\infty, \sqrt{2}]$; i) $x\in[1, 2]\cup[3, +\infty)$; j) $x\in[5, +\infty)$; k) $x\in(-\infty, -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}, +\infty)$; l) $x\in[-2, +\infty)$, m) $x\in(-\infty, -9]\cup[5, +\infty)$. **19.** a) al doilea; b) al doilea; c) egale; d) primul; e) al doilea; f) al doilea; g) primul. **20.** a) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt[4]{54}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt[12]{75}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$. **21.** minus; plus; minus; minus; dacă $m>n^2$ este pozitiv, iar dacă $m<n^2$ este negativ. **22.** a) primul; b) al doilea. **23.** a) $6(7\sqrt{10}-29)$; b) 1. **24.** a) Se ridică ambii membri la pătrat; b) Membrul stîng este egal cu $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}}}\sqrt[3]{2-\sqrt[5]{32}}$, iar membrul drept este egal cu $\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3^2})$. **25.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **26.** $\sqrt{7}+\sqrt{2}$. **27.** $\sqrt{4a+1}=\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leqslant\frac{1}{2}[(4a+1)+1]=2a+1$. Analog, $\sqrt{4b+1}\leqslant 2b+1$, $\sqrt{4c+1}\leqslant 2c+1$. Adunăm apoi inegalităţile membru cu membru. **28.** a) $\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$; b) $\frac{(x-2)\sqrt{x+4}}{(x+2)\sqrt{x-4}}$; c) $\frac{x+\sqrt{y+2}}{x-1}$. **29.** Numărătorul se mai poate scrie $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1})$. După simplificare se obţine $a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1}$ şi ţinînd cont de $a>b>0$ se obţin inegalităţile. Făcînd $a=n+2$, $b=n+1$ şi $m=n+1$ obţinem $(n+1)(n+2)^n>(n+2)^{n+1}-(n+1)^{n+1}$, de unde $(n+1)^{n+1}>(n+2)^n$, deci $\sqrt[n]{n+1}>\sqrt[n+1]{n+2}$. **30.** a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1)$; b) $3+2\sqrt{2}$; c) $4-2\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}-2$; e) $\sqrt{3}-1$; f) $5+3\sqrt{2}$. **31.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se arată că numărul este 6.

32. a) $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $\frac{5(\sqrt[3]{4}+\sqrt{3})(2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{4}+9)}{-23}$; c) $\sqrt[3]{2}-1$; d) $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{6}(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{6}$. f) $\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{6}+12}{23}$ **34.** $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<1{,}6+1{,}2=2{,}8<2\sqrt[3]{3}$. **35.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se obţine numărul egal cu $\frac{7}{13}$. **36.** Se aplică formula $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. **37.** a) Se notează numărul cu u şi se ridică la puterea a treia de unde $u=2\sqrt{2}$; b) $u=-2$; c) $u=2\sqrt{2}$; d) $u=1$. **38.** a) $\frac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}$; b) $(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$; c) $\frac{\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}-1\right)\sqrt{5}}{10}$; d) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; e) $\sqrt{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})(5\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{25}+9)}$; f) $-\frac{1}{18}(\sqrt[3]{3}+\sqrt{3})(3\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}+9)$; g) $\frac{3-\sqrt[4]{27}}{6}$; h) $-\frac{1}{252}(\sqrt[3]{9}+9)$. **39.** Punem $\sqrt[3]{a}=u$, $\sqrt[3]{b}=v$, $\sqrt[3]{c}=w$ şi folosim identitatea $u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-vw-wu-uv)$. Obţinem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{ac}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Mai departe înmulţim numărătorul şi numitorul ultimei fracţii cu $(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. **40.** Se poate proceda ca la exerciţiul precedent. **41.** I) Pentru raţionalizare se aplică formula $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$; Se obţine $\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}$; II) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a(a-1)}$. **42.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1$; $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|$; expresia este egală cu $\frac{2}{2-x}$. **43.** a) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, dacă $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$; $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}}$, dacă $x\in[1, +\infty)$; b) $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. **44.** Din condiţiile de existenţă ale rădăcinilor $x+1\geqslant 0$, $1-x^2\geqslant 0$, $\sqrt[3]{x^2+7}-2\geqslant 0$ rezultă $x=-1$, care verifică ecuaţia. **45.** a) Ecuaţia nu are soluţii; b) $x=3$. **46.** a) $x=\frac{-15-\sqrt{5}}{2}$, b) $x=\frac{-5}{8}$; c) $x=-2$; d) $x=2-\sqrt{2}$; e) $x=2$; f) $x_1=3$, $x_2=\frac{2}{3}$; g) $x=3$. **47.** $x_1=a$, $x_2=-a$. **48.** Se obţine $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$, $x_{3,4}=$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$. **49.** a) $x = \frac{16}{25}$; b) $x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$; c) $x_1 = \frac{15 + 4\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1$. **50.** $x = \frac{4 - a}{2\sqrt{2(2 - a)}}$, pentru $0 \leqslant a \leqslant 4/3$. **51.** Dacă $2a + 2b - c \neq 0$, atunci $x = \frac{(c - a - b)^2 - 4ab}{4(2a + 2b - c)}$, cu condiția ca $x \geqslant a + b - c$, este o soluție a ecuației. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluții. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a = b$, atunci oricare $x > -a$ este o soluție a ecuației. **52.** a) $x = 3$; b) $x = 0$; c) $x = 5$. **53.** Pentru $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ecuația are soluția $x = \frac{1}{2a - 1}$ **54.** Dacă $c > 0$ și $c^2 \geqslant |a - b|$ ecuația are soluția $x = \frac{(c^2 + b - a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$. Dacă $c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluție, iar dacă $c = 0$ și $a = b$, ecuația este nedeterminată. **55.** a) $x = 3$; b) $x = 15$. **56.** Dacă $(b - c)(a' - a) \neq 0$, ecuația are soluția $x = \frac{c - b'}{a' - a} = \frac{b - c'}{a' - a}$, cu condiția ca numerele de sub radicali să fie pozitive (adică, $a' - a$, $ca' - ab'$ și $ba' - ac'$ să aibă același semn). Dacă $b = c$ și $b' = c'$ ecuația este nedeterminată. Dacă $a = a'$ și $b \neq c$ sau măcar $b' \neq c'$ ecuația este imposibilă. **57.** Ecuația are ca soluție $x = 1 + \frac{a^2(2 - a)^2}{4(a - 1)^2}$, pentru $a \in (1, 2]$. 58. $x = \frac{n}{(a/b)^{\frac{n+1}{n}} - 1}$, dacă $a, b \neq 0$, n impar. Dacă n este par, ecuația are aceeași soluție x, cînd $ab > 0$ și $a > b$. **59.** Rezultă din identitatea $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = \frac{1}{2}(u + v + w)[(v - w)^2 + (w - u)^2 + (u - v)^2]$, în care se înlocuiește u, v, w respectiv cu $\sqrt[3]{E(x)}$, $\sqrt[3]{F(x)}$, $-\sqrt[3]{G(x)}$. **60.** Se folosește problema **59** și se găsește $x^2 = \frac{(a + b)^2 (a - b)}{27\, b}$, pentru $b \neq 0$. Dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ ecuația nu are soluții, iar dacă $a = b = 0$ ecuația este nedeterminată. **61.** După problema **59** orice soluție a ecuației date este soluție a ecuației $(3x + a + b + c)^3 = 27(x + a)(x + b)(x + c)$, sau $9[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)]x = 27\, abc - (a + b + c)^3$. **62.** a) Se notează $\sqrt[3]{2 - x} = a$ $\sqrt[3]{7 + x} = b$ și se aplică formula $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$. Se obține $x = 1$; b) Se procedează analog ca la punctul precedent. Se obține $x = 3$; c) Se aplică exercițiul **59** și se obține $x = -1$; d) $x = -\frac{3}{13}$. **63.** Demonstrația este analoagă celei de la exercițiul **59**. **64.** Se aplică exercițiul **63** și se obține $x = -\frac{19}{27}$. **65.** II). Scriem ecuația astfel $x - \sqrt{b - x}\sqrt{c - x} = \sqrt{a - x}(\sqrt{b - x} + \sqrt{c - x})$. Pentru ca un număr x diferit de a, b, c să fie soluție a ecuației date este necesar și suficient ca el să fie soluția ecuației obținută prin ridicarea la pătrat a celor doi membri ai ecuației scrise

ca mai înainte, $x - \frac{\alpha}{2a} = \sqrt{b - x}\sqrt{c - x}$ și să verifice condiția $x > \sqrt{b - x}\sqrt{c - x}$, sau încă să fie soluție a ecuației $\left(x - \frac{\alpha}{2a}\right)^2 = (b - x)(c - x)$ și să verifice condițiile: $2 < b$, $x < c$, $x > \frac{\alpha}{2a}$. **66.** $x_{1,2} = \frac{1 - 2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - 2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}$, pentru $0 < a < \frac{1}{4}$. **67.** a) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuației. Se obține $x = 25$; b) $x = 1$; c) $x = 4$; d) $x = 9$. **68.** a) Se notează $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t$ și se obține ecuația $t^2 - 2t + 1 = 0$. Avem $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. **69.** Ecuația nu are soluții. **70.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; c) nu are soluții; d) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{55}}{3}$. **71.** Ecuația nu are soluții. **72.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{-9}{7}$; b) $x = 2$; c) $x = 8$; d) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3}$, $x_4 = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}$; e) $x = -1$. **73.** a) Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă că ecuația nu are soluții; b) Scriem condițiile de existență ale radicalilor; rezultă $x = 6$. **74.** a) Se notează $2 - x = u^3$, $x - 1 = v^2$ și se obține sistemul $u + v = 1$, $u^3 + v^2 = 1$ de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 1$; b) Se procedează ca la punctul a) și se obține $x_1 = 3$, $x_2 = 4 - (-1 + \sqrt{3})^3$, $x_3 = 4 + (1 + \sqrt{3})^3)$; c) $x = 25$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **75.** $x_1 = 7$, $x_2 = 38$. **76.** a) Se notează $\sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} = t$ și se obține ecuația $t^2 + 2t + 1 = 0$. Rezultă $x = 1$; b) Ecuația se poate scrie $\left(\sqrt[8]{\frac{1 - x}{1 + x}}\sqrt[4]{\frac{1 - a}{1 + a}} - \sqrt[8]{\frac{1 + x}{1 - x}}\right)^2 = 0$. Dacă notăm $\sqrt[8]{\frac{1 - x}{1 + a}} = t$, se obține $t = \pm\frac{1 + a}{1 - a}$, de unde $x = -a$; c) Se aduce la același numitor și se obține $x = \frac{a(\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}{1 - (\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}$; d) $\frac{2x + 1}{ax - 1} \geqslant 0$ și se obține o sumă de trei numere pozitive care nu poate fi egală cu zero. Deci ecuația nu are soluții; e) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuației și se obține: $x = \pm\sqrt{\frac{8a^3 + 15a^2b + 6ab^2 - b^3}{2 + b}}$; f) $\frac{15a^2b - b^3 + 6ab^2 + 8a^3}{27b}$. **77.** a) Se împarte ecuația cu $\sqrt[n]{x^2 - 1}$. Se obține $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$, $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$; b) Se împarte ecuația cu $\sqrt[n]{1 + x^3}$ și se notează $\sqrt[n]{\frac{1 + x}{1 - x + x^2}} = t$. Se obține ecuația $t^2 - t - 1 = 0$ de unde

se obțin ecuațiile $\frac{1+x}{1-x+x^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{1+x}{1-x+x^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; c) Se împarte ecuația cu $\sqrt[m]{a^2-x^2}$ și se notează $\sqrt[m]{\frac{x+a}{a-x}} = t$. Se obține $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ și ecuațiile $\frac{x+a}{a-x} = 2^m$; $\frac{x+a}{a-x} = 1$; d) Ecuația se scrie $\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^2} - 2\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^2} = \sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$ și se împarte cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$. Se notează $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = t$, se obține ecuația $t^2-t-2=0$, de unde $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = 2$; e) Ecuația se mai poate scrie $\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^2} - 2\sqrt[4]{(1-\sqrt[3]{x})^2} = \sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$. Se împarte ecuația cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$ și se obține aceeași ecuație în t ca la punctul d); f) Se procedează ca la punctele anterioare. **78.** Dacă $a = 0$, $x \in (-\infty, 0)$; dacă $a > 0$, $x \in [a, +\infty)$; dacă $a < 0$, $x \in (-\infty, a]$. **79.** a) $x \in (-\infty, 5] \cup [50, +\infty) \cap (14, +\infty) \cap (2, +\infty)$, de unde $x \in [50, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [0, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{29}{2}\right) \cap \left(-\infty, \frac{841}{144}\right)$, de unde $x \in (-\infty, -7)$; c) $x \in (2, +\infty)$; d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$. **80.** $x \in (34 + \sqrt{1188}, +\infty)$; b) $x \in \left(-2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$; c) $x \in (-6, 0) \cup (3, 4)$; d) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **81.** a) Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă $x_1 = 5$; b) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{7-\sqrt{40}, 7+\sqrt{40}\}$; c) $x \in \left[-7, -6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$; d) $x \in \left[-1, \frac{11}{4}\right)$; e) $x \in (10, +\infty)$; f) Din condițiile de existență ale radicalilor rezultă $x \in [3, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat se obține $35x^2 - 37x + 21 > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$; deci $x \in [3, +\infty)$; g) Din condițiile de existență ale radicalilor rezultă $x \in [1, +\infty)$. Funcția se scrie $\frac{1}{|\sqrt{x-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|} > 2$. Dacă $x \in (1, 2)$ rezultă inecuația $2 - x < 1$, deci $x \in (1, 2)$. Dacă $x \in (2, +\infty)$, atunci $x^2 - 5x + 5 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. Deci $x \in \left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. În concluzie $x \in \left(1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{2\}$. **82.** a) $\sqrt[6]{2^5}$; b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$. **83.** I) 1; II) $-2\left(\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}\right)^2$; III) $a^{2/3}$. **84.** I) Dacă a, b, c, d sînt pozitive se obține $4a^2c\sqrt{3d}$. Dacă a, b, c oarecare și $d > 0$ se obține $\sqrt{3d}\left[a^2c + a|a|\cdot|c| - a^2\frac{c^2}{|c|}\right]$; II) $24\, a^{\frac{31}{15}}\, b^{\frac{31}{15}}\, c^{-\frac{1}{15}}\, d^{-\frac{1}{3}}$.

85. I) Expresia devine $\sqrt{ab}\,(a+b-\sqrt{ab})$. Pentru $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ se obține $\frac{27\sqrt{2}-18}{25}$; II) -1; III) $\frac{\sqrt{a}\,(1+a)}{a}$; IV) Dacă $a, b > 0$, se obține $\frac{2b\,|a-b|}{a+b-|a-b|}$. Dacă $a, b < 0$, se obține $\frac{2b\,|a-b|}{-a-b-|a-b|}$. **86.** a) $41 \leqslant \sqrt[3]{72351} < 42$; b) $1,5 \leqslant \sqrt{2,5} < 1,6$; c) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$. **87.** I) Să verificăm de exemplu, inegalitatea din stînga. $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Analog, se verifică cealaltă inegalitate. II). Acum, scriem $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} > 1 + 2\,[(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{1\,000\,000})] = 1 + 2(\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{2}) > 2\cdot 1\,001 - \sqrt{8} + 1 > 2\,000 - 3 + 1 = 1998$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la pct. I) rezultă că numărul este < 1999. Deci partea întreagă a numărului este 1998. **88.** Analog, cu problema precedentă (pct. I)), rezultă $\frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} > < 2\,[(\sqrt{10\,001} - \sqrt{10\,000}) + (\sqrt{10\,002} - \sqrt{10\,001}) + \ldots + (\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{1\,000\,000})] = 2(\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{10\,000}) > 2(1\,000 - 100) = 1800$. Analog rezultă $s < 1800,02$. Deci $1800 < s < 1800,02$. **89.** I) Avem $\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$, de unde $1 + \frac{2}{3n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2/3}$. Înmulțind inegalitatea cu $n^{2/3}$, se obține $n^{2/3} + \frac{2n^{-1/3}}{3} > (n+1)^{2/3}$, de unde $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\,[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}]$. Analog, plecînd de la inegalitatea $\left(1 - \frac{7}{3n}\right)^3 > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ se obține $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\,[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$; II) Folosim inegalitatea din stînga de la pct. I) și scriem $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}} > \frac{3}{2}\,(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + \sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{5^2}) + \ldots + (\sqrt[3]{(1\,000\,001)^2} - \sqrt[3]{(1\,000\,000)^2}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1\,000\,002\,000\,001} - \sqrt[3]{16}) > \frac{3}{2}.10000 - \sqrt[3]{54} > 15\,000 - 4 = 14\,996$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la pct. I), se obține că numărul este < 14997. Deci partea întreagă a numărului este 14 996. **90.** $(-1, 1)$.

91. a) $x=\frac{5}{8}$, $y=\frac{3}{8}$; b) $x_1=4$, $y_1=4$ și $x_2=5$, $y_2=4$; c) $x=1$, $y=1$, d) $x_{1,2}=\pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y_{1,2}=\pm\frac{8\sqrt{3}}{2}$; $x_{3,4}=\pm 5$, $y_{3,4}=\pm 4$ (semnele se corespund); $x_{5,6}=\pm 10\sqrt{3}$, $y_{5,6}=\mp 8\sqrt{3}$; $x_{7,8}=\pm 15$, $y_{7,8}=\mp 12$ (semnele alternează); e) $x_1=4$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=1$; f) $x=3$, $y=1$.

Capitolul VII
NUMERE COMPLEXE

1. a) $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{4}$; b) $x=1$, $y=1$; c) $x=0$, $y=0$; d) $x=-5$, $y=11$; e) $x_1=\sqrt{17}$, $y_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\sqrt{17}$, $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\sqrt{7}$, $y_3=3$; $x_4=-\sqrt{7}$, $y_4=3$; f) $x_1=a$, $y_1=b$; $x_2=\frac{3a-4b+2}{5}$, $y_2=\frac{-4a-3b+14}{5}$. **2.** a) $3-4i$; $3+4i$; $2-11i$; $2+11i$; b) $18-6i$, $14-7i$, $33-11\sqrt{2}i$; c) $-\frac{7}{29}+\frac{32}{29}i$; $\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i$; $\frac{52}{145}+\frac{44}{145}i$; $\frac{61}{13}+\frac{4}{13}i$; d) $-1+3i$; -1. **5.** a) $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Dacă $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\varepsilon_1^n=\varepsilon_2^n=1$, dacă $n=3k$; $\varepsilon_1^n=\varepsilon_1$, $\varepsilon_2^n=\varepsilon_2$, dacă $n=3k+1$; $\varepsilon_1^n=\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^n=\varepsilon_1$, dacă $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$; b) Pentru $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obține $-\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{3}}{6}$, respectiv $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru $\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obține $-\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv $\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; c) a^3+b^3, respectiv a^2-ab+b^2; d) $a^3+b^3+c^3-3abc$. **7.** $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_1z_2=\frac{5}{18}+\frac{\sqrt{2}}{18}i$; $z_1/z_2=-\frac{6}{5}+\frac{6\sqrt{2}}{5}i$; $z_1^2+z_2^2=-\frac{29}{36}+\frac{7\sqrt{2}}{18}i$; $z_1^3+z_2^3=-\frac{7}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}i$; $z_1^4+z_2^4=\frac{1}{36^2}(265-892\sqrt{2}i)$; $z_2^5z_1^{-3}=-\frac{5^3}{12\cdot 6^3}(1+\sqrt{2}i)$. **8.** $\{z\in\mathbb{C}\mid z=a+bi,\ a+b=1\}$. **9.** a) $-i$; b) $\frac{8ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}i$; c) $\frac{3a^2-1}{4a^2+1}(2a-i)$. **10.** a) 2^{100}; b) 2, pentru $n=4k$; 0, pentru $n=4k+1$; -2, pentru $n=4k+2$; 0, pentru $n=4k+3$ $(k\in\mathbb{N})$; c) $2(1-i)^n$; d) $(2+i)^n+(2-i)^n$. **11.** a) 2; b) -1; c) -1; d) 2. **12.** a) 2, pentru $n=3k$; -1, pentru $n=3k+1$, -1, pentru $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$;

b) -3, pentru $n=3k$; 0, pentru $n=3k+1$; 0, pentru $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$, c) -3, pentru $n=3k$; 0, pentru $n=3k+1$, 0, pentru $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$. **13.** Observăm că $i^{4l+1}+i^{4l+2}+i^{4l+3}+i^{4l+4}=0$ și $(-1)^{4l+1}i^{4l+1}+(-1)^{4l+2}i^{4l+2}+(-1)^{4l+3}i^{4l+3}+(-1)^{4l+4}i^{4l+4}=0$, unde $l\in\mathbb{N}$. Obținem $s_1=0$, pentru $n=4k$; $s_1=i$, pentru $n=4k+1$; $s_1=i-1$, pentru $n=4k+2$; $s_1=-1$, pentru $n=4k+3$. De asemenea, $s_2=0$ pentru $n=4k$; $s_2=-i$, pentru $n=4k+1$; $s_2=-i-1$, pentru $n=4k+2$; $s_2=-1$, pentru $n=4k+3$. **14.** Dacă $z=(1+i)^n+(1-i)^n$, atunci $\bar{z}=z$, adică $z\in\mathbb{R}$. **15.** $|z|=16$. **16.** a) $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$; b) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $z_1=\frac{-3+\sqrt{7}}{4}+\frac{-1+\sqrt{7}}{4}i$, $z_2=\frac{-3-\sqrt{7}}{4}-\frac{1+\sqrt{7}}{4}i$. **19.** $z_1=21-i$; b) $z_2=\frac{9}{10}-\frac{7}{10}i$. **20.** a) $\{z\mid z=x+iy,\ x^2+(y+1)^2-4\leqslant 0\}$; b) $\{z\mid z=x+iy,\ x^2+(y-2)^2-9>0\}$; c) $\{z\mid z=x+iy,\ x^2+y^2-4\leqslant 0\}$; d) $\left\{z\mid z=x+iy,\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2-\frac{1}{4}>0 \text{ și } \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{9}{4}<0\right\}$; e) $\{z\mid z=x+iy;\ x^2+(y-1)^2-16>0\}$; f) $\left\{z\mid z=x+iy,\ \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-1<0\right\}$; g) $\{z\mid z=x+iy,\ x<0\}$.

21. a) $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}i$, $x_3=1-\sqrt{3}i$; c) $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$, $x_3=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$; d) $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{3}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i$, $x_3=-\frac{3}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i$; e) $x_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $x_4=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; f) $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=3i$, $x_4=-3i$; g) $x_1=x_2=-1$, $x_3=x_4=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5=x_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **22.** Interpretarea geometrică. Într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu de două ori suma pătratelor laturilor. **23.** Fie $z=a+bi$, $z'=c+di$. Avem $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|\Leftrightarrow(ad-bc)^2\geqslant 0$. Mai mult, $|z+z'|=|z|+|z'|\Leftrightarrow(ad-bc)^2=0\Leftrightarrow$ există λ, astfel încît $c=\lambda a$ și $d=\lambda b$. **24.** Se folosesc proprietățile modulului. **25.** a) Avem $|z|=4m^2+1\in\mathbb{Q}$; b) $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, unde $m, n\in\mathbb{Z}$. **26.** $z=(a-b)^k\in\mathbb{R}$. **27.** $A=\{(x,y)\in P\mid x^2+(y-2)^2-36=0\}$. **28.** $B=(x,y)\in P\mid(x-4)^2+(y+2)^2-8=0\}$. **29.** $C=\left\{(x,y)\in P\mid\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{61}{4}=0\right\}$. **30.** $D=\left\{(x,y)\in P\mid\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}$. **31.** $E=\{(x,y)\in P\mid y=-2x+4\}$. **32.** Ecuația $ax^2+bx+c=0$ are rădăcini reale și distincte dacă $\Delta_1=b^2-4ac>0$. Discriminantul ecuației $2a^2x^2+2abx+b^2-2ac=0$ este $\Delta_2=-4a^2\Delta_1<0$. **33.** $a\in\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6},\ \frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)$. **34.** $X^4+X=X(X+$

$+1)\left(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)\left(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)$; $X^3-1=(X-1)\left(X+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)\left(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)$; $X^4+16=(X-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2})(X-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2})$. **35.** a) $z_1=\frac{-6+\sqrt{21}}{3}+2\mathrm{i}$, $z_2=\frac{-6-\sqrt{21}}{3}+2\mathrm{i}$; b) $z=-\frac{7}{6}+4\mathrm{i}$. **36.** Avem $(1+u\mathrm{i}^{4l+1})(1+u\mathrm{i}^{4l+2})(1+u\mathrm{i}^{4l+3})(1+u\mathrm{i}^{4l+4})=(1+u^2)(1-u^2)$, $l\in\mathbf{N}$. Dacă $n=4k+1$, sau $n=4k+2$ $(k\in\mathbf{N})$, produsul este imaginar; dacă $n=4k+3$, sau $n=4k+4$ $(k\in\mathbf{N})$, produsul este real. **37.** $\alpha=(u+\mathrm{i}v)^n+\mathrm{i}^n(u-\mathrm{i}v)^n$. Dacă $n=2k$ $(k\in\mathbf{N})$, α este real; dacă $n=2k+1 (k\in\mathbf{N})$, α este imaginar. **38.** a) $3x^2=y^4$; b) $x^2=3y^4$. **39.** a) Condiția devine $y^3-3x^2y=0$, $x^3-3xy^2\geqslant 64$; b) Condiția devine $x^3-3xy^2=0$, $|y^3-3x^2y|>64$. **41.** Pentru $z=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ i se obține cea mai mare valoare a lui $|z|$, $|z|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Pentru $z=-\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{2}$ i se obține cea mai mică valoare a lui $|z|$, $|z|=\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{2}$. **42.** $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$, $z_3=\frac{1}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}$. **43.** Se folosește teorema lui Pitagora. **44.** $A=\{x-(x+1)\,\mathrm{i}\mid x\in\mathbf{R}\}$. **45.** $A=\{(x,y)\in P\mid (x-1)^2+y^2-2=0\}$. **46.** a) $A=\{(x,y)\in P\mid y=0\}$; b) $B=\{(x,y)\in P\mid x^2+y^2-1=0\}$. **47.** a) $z=-\frac{2}{37}-\frac{12}{37}\mathrm{i}$; b) $z=-\frac{5}{33}-\frac{29}{33}\mathrm{i}$; c) $z=\frac{74\sqrt{3}}{337}+\frac{146}{337}\mathrm{i}$; d) $z=-\frac{23}{34}-\frac{7}{34}\mathrm{i}$. **48.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,\mathrm{i}$. **50.** a) $z_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$; b) $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=-1+2\mathrm{i}$; c) $z_1=2+\mathrm{i}$, $z_2=-4-\mathrm{i}$; d) $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}$; e) $z_1=3+3\mathrm{i}$, $z_2=2-\mathrm{i}$. **51.** a) $z_1=2-3\mathrm{i}$, $z_2=\mathrm{i}$; b) $z_1=2-\mathrm{i}$, $z_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$; c) $z_1=\frac{8+19\mathrm{i}}{7}$, $z_2=\frac{-18+\mathrm{i}}{7}$; d) $z_1=2$, $z_2=1+2\mathrm{i}$. **52.** a) $z_{1,2}=1+\alpha\pm\alpha(\alpha+1)\mathrm{i}$; b) $z_{1,2}=1\pm\alpha\mathrm{i}$. **53.** Rădăcinile sînt: 0, $\pm\mathrm{i}$, ±1. **54.** a) $\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1}$; b) $\frac{X+1}{X-1+\mathrm{i}}$; c) $\frac{X^2-2X+5}{X^2-4X+5}$; d) $\frac{X-a+bi}{X+bi}$. **55.** a) $x_1=\sqrt{5}$, $y_1=3$; $x_2=-\sqrt{5}$, $y_2=3$; $x_3=\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $y_2=-5$; $x_4=-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $y_4=-5$; b) $x_1=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $y_1=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$; $x_2=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $y_2=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $x_3=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $y_3=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$; $x_4=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $y_4=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$; c) $x_1=2$, $y_1=\sqrt{3}\,\mathrm{i}$; $x_2=2$, $y_2=-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$; $x_3=-2$, $y_3=\sqrt{3}\,\mathrm{i}$; $x_4=-2$, $y_4=-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. **56.** a) $x=1+\mathrm{i}$, $y=\mathrm{i}$, b) $x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{i}$, $y=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$; c) $x=-\frac{11}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i}$, $y=\frac{51}{6}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$.

Capitolul VIII

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. a) Se arată, mai întîi, că $1+\sqrt{6}>\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Dacă $a>1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}}>a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $0<a<1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}}<a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $a=1$, cele două numere sînt egale; b) se arată, mai întîi că $\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2$. Dacă $a>1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}<a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $0<a<1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}>a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $a=1$, cele două numere sînt egale. **2.** a) $x\in(-\infty,-2]$; b) $x\in[-2,+\infty)$; c) $x\in\mathbf{R}$; d) Dacă $a>1$, atunci $x\in[0,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in(-\infty,0]$; dacă $a=1$, atunci $x\in\mathbf{R}$. **3.** a) $\operatorname{Im} f_1=[1,3]$; b) $\operatorname{Im} f_2=(0,1]$; c) $\operatorname{Im} f_3=[0,+\infty)$; d) $\operatorname{Im} f_4=(0,1]$; e) Notăm $2^x=t$ și se utilizează variația funcției de gradul al doilea $f(t)=t^2-8t+18$. Obținem $\operatorname{Im} f_5=[1,+\infty)$. **4.** a) Se consideră separat cazurile: $x-3\geqslant0$ și $x-3<0$. Obținem $x\in(1,5)$; b) Se consideră separat cazurile: $x-4\geqslant0$ și $x-4<0$. Se obține $x\in\mathbf{R}$; c) $x\in\left(1,\frac{5}{3}\right)\cup(2,+\infty)$; d) Se consideră separat cazurile: $|x|<1$ și $|x|>1$. Se obține $x\in(1,2)$. **6.** a) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$; b) $x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$; c) $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$; d) $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$; e) Dacă $a>1$, atunci $x\in(1,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in(0,1)$; f) Dacă $b>1$, atunci $x\in(1,+\infty)$; dacă $0<b<1$, atunci $x\in(0,1)$. **7.** Dacă $0<a<b<1$ sau $1<b<a$, atunci $\log_a b<\log_b a$; dacă $1<a<b$ sau $0<b<a<1$, atunci $\log_a b>\log_b a$; dacă $a=b$, atunci cele două numere sînt egale. **8.** Dacă $a>1$, atunci $x\in[1,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in(0,1]$; b) Dacă $a>1$, atunci $x\in(0,\sqrt[3]{a}]$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in[\sqrt[3]{a},+\infty)$. **10.** a) $x=\sqrt[3]{\frac{m^2(m+n)\sqrt{m+n}}{(m-n)^4 n\sqrt{n}}}$; b) $x=\sqrt[4]{\frac{v\sqrt[3]{(u+v)^2}}{u^2\sqrt{u-v}}}$. **12.** $\log_6 16=\frac{4(3-a)}{3+a}$. **13.** $\log_{30}16=4(1-a-b)$. **14.** Se poate folosi inegalitatea mediilor: $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. **17.** $x/y\in\{1,4\}$. **18.** $\log_5 4+\log_{12}2=\frac{(1-m-n)(2+m-2n)}{2m(1-n)}$. **19.** Să demonstrăm, de exemplu, că $\log_2 3\notin\mathbf{Q}$. Presupunem, prin absurd, că $\log_2 3=\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$, de unde $2^m=3^n$. Cum $\log_2 3>0$, putem presupune $m,n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$. Din egalitatea $2^m=3^n$, $m,n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ este imposibilă, deoarece membrul stîng este un număr par, iar membrul drept este un număr impar. Prin raționamente analoage se demonstrează că numerele $\log_5 10$ și $\log_{1/2}5=-\log_2 5$ sînt iraționale. **20.** $b=a^q$, unde $q\in\mathbf{Q}$. **22.** Notăm $\log_2 x=t$ și obținem $f(t)=(t^2-6t)^2$. Valoarea maximă a lui f se obține pentru $t=3$, deci pentru $\log_2 x=3$, adică pentru $x=8$. **23.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea ex. 26, cap. IV). **24.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea ex. 26, cap. IV.)

25. Avem că $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow 3 > 2^{\sqrt{2}}$. Dar inegalitatea $3 > 2^{\sqrt{2}}$ este adevărată, deoarece $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2^{3/2} < 3$. Deci $\log_2 3 > \log_3 4$. **26.** Avem $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, $c = (ab)^z$ de unde $a^{x+1} = (abc)^x$, $b^{y+1} = (abc)^y$, $c^{z+1} = (abc)^z$. **27.** Avem inegalitățile: $\log_{xy}(yz) + \log_{yz}(xy) \geqslant 2$, $\log_{yx}(zx) + \log_{zx}(yx) \geqslant 2$, $\log_{xy}(zx) + \log_{zx}(xy) \geqslant 2$, care se adună membru cu membru. **28.** Aplicînd inegalitatea mediilor, avem: $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 \geqslant 4\sqrt[4]{\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6} = 4\sqrt[4]{\log_2 6} = 4\sqrt[4]{1 + \log_2 3} > 4\sqrt[4]{1 + \frac{3}{2}} > 5$. **29.** a) $x = 1$; b) Dacă $a \neq 1$, atunci $x \in \{-2, 1, 3\}$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = -5$, $x_2 = 93/11$; e) $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$; f) $x = e$; g) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; h) n-are soluții. **30.** a) $x = 3$; b) n-are soluții; c) $x = 3$; d) $x = 1$. **31.** a) $x = 2$; b) $x = 1/2$; c) $x = 2$; d) $x = 6$; e) $x = 5$; f) $x = 1$. **32.** a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = \lg\frac{217}{285}/2\log\frac{7}{5}$. **33.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = \lg 8/\lg 6$; e) $x = 1$. **34.** a) $x = 0$; b) $x = 7$; c) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **35.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; b) $x = 2$; $x = \frac{5}{2}$; d) $x_{1,2} = \frac{2\lg(5 \pm \sqrt{24})}{\lg 3}$. **36.** a) Se observă că $(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 1$. Notăm $(4 + \sqrt{15})^x = y$ și se obține ecuația $y + \frac{1}{y} = 62$. Se obține $y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$, de unde rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$; b) Se procedează ca la pct. a) și se obține $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; c) Se procedează ca la pct. a) și b). Se obține $x = 3$. **37.** a) Împărțind ambii membri ai ecuației cu 6^x, se obține: $\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{13}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$. Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, de unde rezultă ecuația în y, $6y^2 - 13y + 6 = 0$. Soluțiile ecuației sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 1$; e) Ecuația dată devine $3 \cdot 3^{2x^2+6x-10} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 15 \cdot 5^{2x^2+6x-10}$, care este evident de tipul celor de la punctele precedente. Se obține $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. **38.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) Din condițiile de existență a radicalilor rezultă că $x \in \{3\} \cup [5, +\infty)$. Se observă că $x = 3$ verifică ecuația, iar pentru $x \geqslant 5$, avem $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} > 2$. Deci singura soluție a ecuației este $x = 3$. **39.** Dacă $a < 0$, ecuația nu are soluții; dacă $a > 0$ ecuația are soluția $x = \log_{2/3}(3a)$. Ecuația are soluție întreagă $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a = 2^n/3^{n+1}$. **40.** Ecuația are soluțiile $x = 2$, $y = \pm 5$. **41.** a) Ecuația se scrie $(x^x - x)(x^x - x^2) = 0$ care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$; b) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației. Împărțind ambii membri ai ecuației cu 5^x, se obține ecuația echivalentă $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Dar, pentru $x < 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, iar pentru $x > 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Deci $x = 2$ este unica soluție a ecuației; c) $x = -1$, $x \in [0, 1]$; d) Din condițiile de existență a radicalilor, avem $x \geqslant 3$.

Se observă că $x = 3$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din monotonia funcțiilor $f_1, f_2 : [3, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $f_2(x) = 2^{\sqrt{x-3}}$, rezultă că aceasta este unica soluție a ecuației; d) Din condițiile de existență a radicalilor, rezultă $x \geqslant 4$. Cum $1 \leqslant 2 + a \leqslant 3$ și $1 \leqslant 2 - a \leqslant 3$, rezultă că $1 \leqslant (2 + a)^{\sqrt{x-4}}$ și $1 \leqslant (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$ deci $2 \leqslant (2 + a)^{\sqrt{x-4}} + (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$, de unde în mod necesar $(2 + a)^{\sqrt{x-4}} = (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 1$, de unde rezultă $x = 4$. **42.** a) Se consideră separat cazurile: $|x| \leqslant 1$ și $|x| > 1$. Se obține $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $x \in (-\infty, 1]$. **44.** a) $x = 2$; b) $x = \sqrt{2}$; c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; d) n-are soluții; e) $x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; f) $x \in (0, 2] \setminus \{1\}$, $x = \frac{5}{2}$. **45.** a) $x = a^a$; b) $x = a^{3a^2}$; c) $x = c^b$; d) $x_1 = 6$, $x_2 = 14$; e) $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$; f) $x = c$. **46.** a) n-are soluții; b) n-are soluții; c) $x = 6^{3/4}$; d) Ecuația are soluții pentru $a > 0$, $x = a\sqrt[3]{4a}$; e) $x = 0{,}99$; f) $x = 1$. **47.** a) $x = 5$; b) $-\frac{\lg 5}{\lg 2}$; c) $x = 5$; d) $x = \lg 2$; e) $x = 2$; f) $x = 2$; g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **48.** a) $x_1 = 10$, $x_2 = 10^3$; b) $x \in \{10^{-2\sqrt{2}}, 10^{-2}, 10^2, 10^{2\sqrt{2}}\}$; c) $x \in \{10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2\}$; d) $x_1 = -\frac{9}{10}$, $x_2 = 9$; e) $x_1 = 2^{-8}$, $x_2 = 2^{27}$; f) $x_1 = 2^{-4/27}$, $x_2 = 2^{1/3}$. **49.** $x_1 = 1$, $x_2 = a^{(m:n)^{\frac{1}{m-n}}}$. **50.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = 3^{-5}$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; e) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 5^3$; f) $x \in \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{-1}, 2, 2^{\sqrt{2}}\}$; g) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 9$; h) $x_1 = 3$, $x_2 = 3^6$. **51.** a) Utilizînd formula de schimbare a bazei, ecuația devine $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$, de unde se obține $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$; b) $x = 10^{\lg 3 \lg 5}$; c) $x = a^{2/5}$; d) $x_1 = 4$, $x_2 = 2 + 2^{-\frac{5}{4}}$; e) $x = \frac{1}{32}$; f) $x = 2$. **52.** $x_1 = 1$, $x_2 = ac$. **53.** a) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din monotonia funcțiilor $f_1, f_2 : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x + 2^x + \log_2 x$, $f_2(x) = 7$, rezultă că aceasta este unica soluție a ecuației; b) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației și că aceasta este unică. **54.** $x_1 = a^{a^{\frac{1}{2}}}$, $x_2 = a^{a^2}$; b) $x = \frac{1}{a^2}$; c) $x_1 = a$, $x_2 = a^{9/16}$. **55.** a) $x = 3$, $y = 2$; b) $x = 0$, $y = 0$; c) $x_1 = 3$, $y_1 = 3$ și $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; d) $x = 1$, $y = 3$, e) $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2$ și $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y_2 = -3$; f) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuații a sistemului; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$. Dacă $a < 1$, $b > 1$, sau $a > 1$, $b < 1$, ecuația a doua a sistemului nu poate fi satisfăcută pentru nici o valoare pozitivă a lui x și y, deci în acest caz sistemul nu are soluții.

Să presupunem că $a > 1, b > 1$ (sau $a < 1,\ b < 1$). Logaritmăm ambii termeni ai fiecărei ecuații a sistemului și obținem că, pentru $a \neq b$, $x = \left(\frac{\lg a}{\lg b}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}}$ și $y = \left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b - \lg a}}$, iar pentru $a = b$, sistemul are o infinitate de soluții $y = x = \alpha$, cu α real pozitiv. h) Dacă $b = 0$ sau măcar $c < 0$, sistemul nu are soluții. Fie $b > 0$, $c > 0$ și notăm $a^x = u$, $a^y = v$. Obținem sistemul $u^2 + v^2 = b$, $uv = c$, unde $u > 0$, $v > 0$. Deci u și v sînt soluțiile ecuației de gradul al doilea $z^2 - \sqrt{b + 2c}z + c = 0$. În final, se obține că dacă $b - 2c < 0$, sistemul nu are soluții, iar dacă $b - 2c \geqslant 0$, atunci

$$x_1 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} + \sqrt{b - 2c}}{2},\quad y_1 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} - \sqrt{b - 2c}}{2},$$

$$x_2 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} - \sqrt{b - 2c}}{2},\quad y_2 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} + \sqrt{b - 2c}}{2};$$

i) $x_1 = 2,\ y_1 = 3$ și $x_2 = 1/2,\ y_2 = 3$; j) $x_1 = 8,\ y_1 = 18$ și $x_2 = 8 \log_3^3 2$, $y_2 = 16 \log_2^4 3 + 2$; k) $x_1 = 1,\ y_1 = 4$ și $x_2 = 4,\ y_2 = 7$; l) Trebuie ca $x > 0, y > 0$. Avem $x_1 = y_1 = 1$ și $x_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}$, $y_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}$; m) $x = 2$, $y = 3,\ z = 4$. **56.** a) Avem $\log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 8\sqrt{y}$. Atunci sistemul devine: $x = 8\sqrt{y},\ x^2 + 16y^2 = 17$. Se obține $x = 2,\ y = \frac{1}{16}$; b) $x = 10\sqrt[5]{\frac{7^2}{10^4}}$, $y = \sqrt[5]{\frac{7}{10^2}}$; c) $x = y = 3$; d) n-are soluții; e) $x_1 = y_1 = 2$ și $x_2 = 8,\ y_2 = \frac{1}{8}$; f) $x = 2,\ y = 6$; g) Trebuie ca $x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1$. Logaritmăm în baza c prima ecuație, iar a doua o scriem sub forma $\log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y}$. Dacă $a \neq b$ $(a, b > 0)$, atunci $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. Dacă $a = b$, sistemul nu are soluții; h) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuații; i) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$; j) Ecuația a doua devine $x^x = y^{x+2y}$. Se deduce $x = 4,\ y = 2$; k) Trebuie ca $m, n > 0$, $m, n \neq 1$. Dacă $m \neq n$, atunci rezultă $\log_m x = \frac{a - b\log_n m}{1 - (\log_n m)^2}$, $\log_m y = \frac{b - a\log_n m}{1 - (\log_n m)^2}$. Dacă $m = n$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluție. Dacă $m = n$, $a = b$, sistemul se reduce la ecuația $\log_m(xy) = a$; l) Notăm $\log_x y = u$, $\log_x 3 = v$ și se obține ecuația în u: $7u^3 - 67u^2 + 118u - 24 = 0$ care are o rădăcină $u = 2$; m) Prima ecuație a sistemului este $\log_a(x^{\log_a x} y^{\log_a y}) = 2m$, adică $x^{\log_a x} y^{\log_a y} = a^{2m}$. Se notează $u = x^{\log_a x}$, $v = y^{\log_a y}$ și sistemul

devine $uv = a^{2m}$, $u + v = 2\frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}a^m$, n) Adunăm ecuațiile și obținem $(xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} + (yz)^{\lg x} = \frac{a + b + c}{2}$. Scădem din aceasta fiecare din ecuațiile sistemului dat și obținem sistemul $(yz)^{\lg x} = \frac{-a + b + c}{2}$, $(xz)^{\lg y} = \frac{a - b + c}{2}$, $(zy)^{\lg x} = \frac{a + b - c}{2}$. Logaritmăm fiecare ecuație a sistemului și notînd $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$, obținem un sistem în u, v, w care se rezolvă ușor. **57.** a) $x \in (-1 - \sqrt{2}, -2) \cup (0, -1 + \sqrt{2})$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup (0, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; c) $x \in (0, 1)$; d) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x > 3$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(\frac{5 + \sqrt{61}}{6}, 3\right)$; e) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (\log_2 3, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty, \log_2 3)$; f) $x \in \left(-\infty, \frac{\log_3 4}{2}\right)$; g) $x \in [\sqrt{6} - 1, 5] \setminus \{2\}$; h) $x \in \left(\frac{31}{100}, 5 + 2\sqrt{6}\right)$; i) $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \cup \{2\}$; j) $x \in (1, \log_3 28 - 3) \cup (1 + \log_3 4, +\infty)$; k) $x \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{6 - \sqrt{6}}{4}\right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{4}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$; l) $x \in (3, 5)$; m) $x \in (0, \sqrt{2} - 1) \cup$ $\cup (1, +\infty)$; n) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$. **58.** a) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup$ $\cup (1, +\infty)$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1] \cup \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}\right]$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left[\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\right) \cup [1, +\infty)$. **59.** Se consideră separat cazurile: $\frac{a - 1}{a + 1} > 1$ și $0 < \frac{a - 1}{a + 1} < 1$. În primul caz inegalitatea devine $x^2 \geqslant \frac{-2(a + 2)}{a + 1}$ și pentru ca să fie satisfăcută pentru orice x real, trebuie ca $\frac{-2(a + 2)}{a + 1} \leqslant 0$; se obține $a \in (-\infty, -2]$. În al doilea caz inegalitatea devine $x^2 + 3 \leqslant \frac{a - 1}{a + 1}$ și nu există nici o valoare a lui a pentru ca ea să fie satisfăcută pentru orice x real. Deci $a \in (-\infty, -2]$. **60.** $a \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. **61.** Punem $z = 2^x > 0$ și problema revine la a determina toate valorile lui m, astfel încît $mz^2 +$ $+ 4(m - 1)z + m - 1 > 0$, oricare ar fi $z > 0$. Se găsește $m \in [1, +\infty)$. **62.** $m \in [0, +\infty)$. **63.** Dacă notăm $e^a = u$, $e^b = v$, $e^c = w$, avem că u, v, w sînt distincte. Din condițiile problemei, dînd lui x valorile: 0, 1, 2, rezultă că $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$. Rezolvind sistemul de ecuații în α, β, γ, găsim $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX

INDUCȚIA MATEMATICĂ

1. Se demonstrează ușor prin inducție matematică. Este util de încercat să se determine formulele care dau sumele din membrul stîng. **2.** a) Observăm că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Se demonstrează, apoi, prin inducție matematică că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, pentru orice $n \geqslant 1$; b) Observăm că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$. Folosind problema 1, se găsește că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Se demonstrează apoi prin inducție matematică că formula găsită este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$. **3.** Se demonstrează prin inducție matematică. **4.** a) Folosind formula $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$, se obține $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$; b) Folosind formula $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$, se obține $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$. **5.** a) Folosind formula $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$, se obține $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$; b) Folosind formula $\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$, se găsește $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; c) Folosind formula $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$, se obține $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3n+1}$; d) Se obține $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4n+1}$; e) Se obține $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i+n-1)(i+n)} = \frac{n}{k(n+k)}$. **7.** a) Avem $\sum_{k=1}^{n} k!\,k = \sum_{k=1}^{n} k!\,(k+1-1) = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!]$. Se obține $\sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n+1)! - 1$; b) $\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)!\,(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n+2)! - (n+1)! = (n+1)!\,(n+1)$; c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$; e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}\right) = \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$; f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$. **11.** Condiția de existență a logaritmului ne dă $x > -4$. Inegalitatea este echivalentă cu $2^{3x+1} < (x+4)^2$, care este evident satisfăcută pentru x egal cu: $-3, -2, -1, 0, 1$. Se demonstrează prin inducție matematică că pentru oricare $x \geqslant 2$, întreg, avem $2^{3x+1} > (x+4)^2$. Deci $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x + 1 < 2\log_2(x+4)\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **12.** Pentru $n = 0, 1$, inegalitatea este îndeplinită; pentru $n = 2, 3, 4$, inegalitatea nu este îndeplinită. Pentru $n = 5, 6$ este îndeplinită. Se demonstrează prin inducție matematică că inegalitatea este îndeplinită pentru orice $n \geqslant 5$. Deci $\{n \in \mathbf{N} \mid 2^n > n^2\} = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 5\}$. **16.** Pentru $n = 1$, avem $a + b \geqslant a + b$, adevărată. Să presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$ și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Într-adevăr, $2^{k-1}(a^k + b^k) \geqslant (a+b)^k$ ne dă $2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \geqslant (a+b)^{k+1}$. Dar $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} \geqslant a^k b + ab^k \Leftrightarrow (a^k - b^k)(a - b) \geqslant 0$. Ultima inegalitate fiind evident adevărată rezultă că $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)$, deci $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant (a+b)^{k+1}$. Demonstrația este terminată pe baza inducției matematice. **17.** a) Demonstrația se face prin inducție matematică după k; b) Dacă $k \leqslant n$, atunci $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+2k+1}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}$, deoarece $n(k+1) > k^2$ pentru $n \geqslant k$. Punem mai înainte $k = n$ și obținem $2 = 1 + \frac{n}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$. **18.** Pentru $n = 6$ se verifică că inegalitățile sînt îndeplinite. Să considerăm că $\left(\frac{k}{2}\right)^k > k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$ și să demonstrăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > (k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$. Pentru a demonstra ultimele inegalități este suficient să verificăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{2}\right)^k \geqslant k + 1 \geqslant \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{3}\right)^k$, care

se reduce la $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, care rezultă din problema precedentă. **19.** Pentru $n = 2$, se obține $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$. Se demonstrează mai întîi că inegalitatea este adevărată pentru $n = 2k$. Din cele de mai sus rezultă că inegalitatea este adevărată pentru un număr natural $n = 2^s$, $s \in \mathbf{N}$. Se arată, apoi, că dacă inegalitatea este adevărată pentru $n = k$, atunci este adevărată pentru $n = k - 1$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ numere pozitive și λ un număr pozitiv, deocamdată nedefinit. Atunci $\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}$. Alegem λ, încît $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$, deci $\lambda = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Avem

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1} \quad \text{sau}$$

$\sqrt[k-1]{a_1a_2\ldots a_{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Fie acum un număr oarecare m, natural. Dacă $m=2^s$, $s\in\mathbf{N}$, rezultă de mai înainte că inegalitatea este adevărată pentru m. Dacă $m\neq 2^t$, oricare ar fi $t \in \mathbf{N}$, atunci fie s, astfel încît $m < 2^s$. Pe baza celor de mai înainte, inegalitatea este adevărată pentru $n = m$. **20.** Demonstrația rezultă ușor prin inducție matematică. **21.** Suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ se divide cu 9. Să presupunem că suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ se divide cu 9. Atunci suma $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$ se divide evident cu 9, ca fiind suma a doi termeni fiecare dintre aceștia fiind divizibil cu 9. **22.** $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ este divizibil cu 2 și cu 3, deci cu 6. Să demonstrăm că $n^5 - n$ se divide cu 5. Fie $d_n = n^5 - n$ și să considerăm propoziția „d_n se divide cu 5". Evident $d_0 = 0$ se divide cu 5. Să presupunem că d_k se divide cu 5 și să demonstrăm că d_{k+1} se divide cu 5. Într-adevăr, $d_{k+1} = (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = d_k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Se observă că d_{k+1} se divide cu 5. **23.** a) Fie propoziția $P(n)$: „$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133". Evident, $P(0)$ este adevărată, deoarece $11^2 + 12 = 133$. Să presupunem că $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ se divide cu 133, adică $P(k)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată. Într-adevăr, avem $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 12^2 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) - (12^2 - 11) \cdot 11^{k+2}$. Observăm că acesta se divide cu 133, ca fiind diferența a două numere, fiecare dintre ele fiind divizibil cu 133; b), c), d) se demonstrează analog. **26.** b) Dacă $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, atunci $2(k+1)^3 > (k+1)^2 + 3(k+1) + 1$, deoarece această inegalitate se obține din prima prin adunarea membru cu membru a ei și a inegalității evidente $6k^2 + 6k + 2 > 6k + 6$. **27.** Din $3^k > k^3$, rezultă $3^{k+1} > 3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$. De aici, rezultă, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, $n \geqslant 4$. **28.** Pentru $n = 0$, inegalitatea este îndeplinită. Fie $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$. Atunci $|\sin (n+1)x| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx| \leqslant |\sin nx||\cos x| + |\sin x||\cos nx| \leqslant n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$. Deci $|\sin (n+1)x| \leqslant (n+1)|\sin x|$. Demonstrația este terminată pe baza inducției

matematice. **29.** Trebuie să demonstrăm că orice număr natural mai mare decît 8, se poate descompune în suma a două numere, dintre care un multiplu de 3 și un multiplu de 5. Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $k = 8$ afirmația este adevărată, deoarece $8 = 3 + 5$. Fie că afirmația este adevărată pentru un număr n, adică $n = 3s + 5t$, $s, t\in\mathbf{N}$. Sînt posibile două cazuri: 1) $t = 0$; 2) $t \geqslant 1$. În primul caz, cînd $t = 0$, trebuie ca $s \geqslant 3$. Atunci $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s-3) + 5(t+2)$. În cazul al doilea $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s+2) + 5(t-1)$. Deci afirmația este adevărată pentru $n + 1$. **31.** Pentru $n = 1$ afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru k și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Alegem unul din plane, să zicem al $(k+1)$-lea. Atunci conform problemei precedente planul ales este împărțit de dreptele de intersecție ale celorlalte k plane cu acesta, în $2k$ părți. Conform ipotezei inductive cele k plane rămase împart spațiul în $k(k-1) + 2$ părți. Fiecare parte a planului ales (al $k+1$-lea) împarte una din părțile spațiului date de cele k plane în două părți. Deci se obțin $k(k-1) + 2 + 2k = (k+1)k + 2$ părți. **32.** Demonstrăm prin inducție matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmația este adevărată, deoarece $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$, iar o dreaptă împarte planul în două părți. Fie adevărată afirmația pentru $n = k$ și să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem una din cele $k+1$ drepte pe care o vom numi a $(k+1) - a$. Din ipoteza inductivă cele k drepte rămase împart planul în $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ părți, a $(k+1)$-a dreaptă taie primele k în k puncte și de aceea este împărțită de aceste puncte în $k + 1$ părți. Deoarece cele k puncte obținute sînt diferite de punctele de intersecție ale primelor k drepte (între ele), atunci fiecare din aceste părți împart una din părțile planului în două părți (date de cele k drepte), adică la $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ părți se adaugă încă $k + 1$. Deci avem $1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ părți. **33.** Se demonstrează prin inducție matematică după n, folosind problema precedentă (la trecerea de la pasul k la pasul $k+1$), analog raționamentului din problema 32. **34.** Vom demonstra prin inducție matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru $n = k$ și să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem unul din cercuri și atunci, mai întîi, el se intersectează cu fiecare din celelalte k cercuri în cel mult 2 puncte, și în al doilea rînd cele k cercuri rămase împart planul în cel mult $k^2 - k + 2$ părți (conform ipotezei de inducție). Punctele obținute (în număr de cel mult $2k$) de intersecție ale cercului ales cu celelalte cercuri îl împart în cel mult $2k$ părți și fiecare dintre aceste arce împart una din părțile avute ale planului în două. Deci se obțin cel mult $(k^2 - k + 2) + 2k = (k+1)^2 - (k+1) + 2$ părți. Dacă cercurile sînt două cîte două secante, atunci avem egalitate. **35.** Pentru $n = 1$ afirmația nu necesită demonstrație. Să demonstrăm că și pentru $n = 2$ este de asemenea valabilă. Să notăm laturile pătratelor date $ABCD$ și $A'B'C'D'$ cu a și b (fig. 21). Să presupunem $a \geqslant b$ și fie M, N, P, Q pe laturile pătratului $ABCD$, astfel încît $AM = BN = CP = DQ = \frac{a+b}{2}$ și tăiem pătratul după dreptele MP

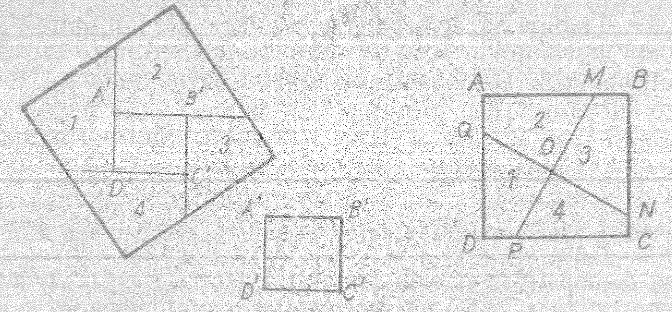

Fig. 21

și NQ, obținînd patru părți egale. Aceste părți se pot aplica pe laturile celui de al doilea pătrat ca în figură, obținîndu-se un nou pătrat. Să presupunem afirmația adevărată pentru n pătrate și să considerăm acum $n+1$ pătrate. Alegem două oarecare P_1 și P_2 și procedind ca la pasul $n=2$ obținem din acestea un nou pătrat P'. Astfel am redus numărul pătratelor la n și aplicăm ipoteza de inducție pentru pasul n. **36.** Vom face inducție după numărul l al frontierelor hărții. Fie $l=0$, atunci $s=1$, $p=1$ și clar $s+p=l+2$. Să presupunem că teorema este adevărată pentru orice hartă care are n frontiere și să considerăm o hartă ce conține $l+1$ frontiere, s țări și p vîrfuri. Sînt posibile două cazuri: 1) Pentru orice pereche de vîrfuri ale hărții există un drum unic care le unește de-a lungul frontierelor hărții. În acest caz harta nu are nici un contur închis. Avem $s=1$. Se arată că pe o astfel de hartă se va găsi cel puțin un vîrf aparținînd numai unei singure frontiere. Îndepărtînd acest vîrf cu unica frontieră care îl are drept capăt, obținem o nouă hartă în care $l'=l-1=n$, $s'=s-1$, $p'=p-1$. În virtutea ipotezei inductive $s'+p'=l'+2 \Rightarrow s+p=l+2$. 2) Există două vîrfuri unite prin mai multe drumuri. În acest caz pe hartă există un contur închis care trece prin aceste vîrfuri. Îndepărtînd una dintre frontierele acestui contur (fără vîrfuri), obținem o nouă hartă în care $l'=l-1=n$, $p'=p$, $s'=s-1$. Prin ipoteza inductivă $s'+p'=l'+2 \Rightarrow s+p=l+2$. **37.** Să așezăm poliedrul în interiorul unei sfere de rază suficient de mare și să proiectăm din centrul sferei, care-l putem considera în interiorul poliedrului toate punctele poliedrului pe sferă. Harta obținută pe sferă o proiectăm dintr-un punct arbitrar al ei, care nu aparține nici unei frontiere, pe planul tangent sferei în punctul diametral opus. Hărții plane obținute îi aplicăm teorema lui Euler (problema precedentă). **38.** Pentru $n=1$, afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru k și să demonstrăm că este adevărată pentru $k+1$. Fie pentru aceasta $k+1$ sfere. Deoarece k sfere interesctează sfera $(k+1)$-a după k cercuri și prin urmare împart suprafața ei în k^2-k+2 părți (vezi problema 37) rezultă că dacă k sfere, două cîte două secante, împart spațiul în N_k părți, atunci $k+1$ sfere împart spațiul în $N_{k+1}=N_k+(k^2-k+2)$ părți. De aici rezultă $N_{k+1}=\frac{k(k^2-3k+8)}{3}+(k^2-k+3)=\frac{(k+1)((k+1)^2-3(k+1)+8)}{3}$. Conform inducției matematice afirmația este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$, număr natural.

Capitolul X

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. a) $n=5$; b) $n=3$; c) $n=6$. **2.** a) $n \geqslant 12$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $3 \leqslant n \leqslant 11$ $(n \in \mathbf{N})$. **3.** a) $5 \leqslant n \leqslant 20$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $n \in \{0,1,2,3\}$. **4.** $5!=120$. **5.** a) $5!:2=60$ moduri; b) $4!=24$ moduri. **6.** a) $6!-5!=600$; b) $5!=120$; c) $5!-4!=96$; d) $4!=24$; e) $600-24=576$. **7.** $\frac{7!}{14}=360$. **8.** Fie (i, j), $i=1, 2, ..., 8$; $j=1, 2, ..., 8$, careul care se găsește la intersecția liniei orizontale i cu linia verticală j (pe tabla de șah). Două turnuri care se găsesc în careurile (i, j) și (k, l) nu se pot lua unul pe celălalt, atunci și numai atunci cînd $i \neq k$ și $j \neq l$. Se găsesc $8!=40320$ așezări posibile diferite ale celor 8 turnuri. **9.** Se găsește mai întîi că există $k!\,(n-k+1)!$ permutări, în care numerele $a_1, a_2, ..., a_k$ ocupă k locuri la rînd și deci numărul cerut în problemă este $n!-k!\,(n-k+1)!$. **10.** $\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left(\left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(n-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{6}\right]\right)\right)!\left[\frac{n}{6}\right]!\right.$. **11.** a) $\frac{n^2-11n+31}{n-5}$; b) 0; c) 1; d) $n+3$; e) $\frac{n^2-n-2k-2}{k+1}$; f) $4k^2$; g) $\frac{(n-1)!}{(k-1)!}=A_{n-1}^{n-k}$; h) $\frac{n!}{(k-1)!}=A_n^{n-k+1}$. **12.** a) $n=7$; b) $n=5$; c) $n=8-m$, $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $n=12$; e) $n=9$. **13.** $A_5^3=60$ moduri. **14.** $A_6^2=30$ dicționare. **15.** $A_9^5=15120$; $4A_8^4=8400$. **16.** Numere cu cinci cifre sînt: $A_5^5-A_4^4=96$. Numere cu patru cifre sînt: $A_5^4-A_4^3=96$. Numere cu trei cifre sînt: $A_5^3-A_4^2=48$, cu două cifre sînt: $A_5^2-A_4^1=16$, iar cu o cifră sînt 5. În total sînt 261 numere. **17.** Numărul liniilor poligonale neînchise este egal cu $\frac{1}{2}A_n^{k+1}$, iar al celor poligonale închise este egal cu $\frac{A_n^k}{2n}$. **18.** a) 0; b) $\frac{2(n-k)}{n-1}$. **19.** $n=9$; $C_9^7=36$. **20.** a) $n \in \{3, 14\}$; b) $n=5$; c) $n=19$; d) $n=4$; e) $n=7$; f) $n=4$; g) $n=7$; h) $n=5$; i) $n=27$. **21.** a) $n>6$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $1 \leqslant k \leqslant 9$ $(k \in \mathbf{N})$; c) $9 \leqslant k \leqslant 15$ $(k \in \mathbf{N})$; d) $4 \leqslant n \leqslant 13$ $(n \in \mathbf{N})$. **22.** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **23.** $9 \cdot 7=63$; $C_9^2 \cdot C_7^2=756$. **24.** $C_8^4=70$; $3 \cdot C_5^3=30$. **25.** $C_6^2=15$. **26.** $C_9^5=126$; $C_{10}^5=252$. **27.** $C_6^3 \cdot C_9^4+C_6^4 \cdot C_9^3+C_6^5 \cdot C_9^2+C_6^6 \cdot C_9^1=4005$. **28.** $C_7^4 \cdot A_8^4=58\,800$. **29.** a) $x=5k-1$, $y=3k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$; b) $x=3$, $y=8$; c) $x=5$, $y=5$; d) $x=\frac{2(k+1)!\,(n-k)!}{n!}$, $y=\frac{k(k+1)(2k-n+1)}{n^2(n+1)}$. **30.** a), b). Se folosește relația $C_{2n}^n=2C_{2n-1}^n$; c) Se folosește formula $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$. **31.** a) $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$; b) Suma se scrie astfel $\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2(k-1)^2}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k^4-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}k^3+\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k^2$. Se folosește apoi problema 1 din capitolul IX. 31. a) $\frac{n(n^2-1)}{6}$; b) $\frac{n(n+1)(3n^3-3n^2-2n+2)}{60}$. **32.** Se demonstrează prin inducție după n. Notăm cu $S_n=1+N_1+N_2+...+N_{n-1}$. Dacă considerăm numerele $1, 2, ..., n, n+1$, atunci se

observă că $S_{n+1} = 1 + [N_1 + (n+1)] + [N_2 + (n+1)N_1] + \ldots + [N_{n-1} + (n+1)N_{n-2}] + (n+1)N_{n-1} + n!$. **33.** a) $1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 2^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2^n = (1+2)^n = 3^n$; b) Același rezultat ca la punctul a). **34.** Să notăm cu S suma cerută. Împărțind ambii membri cu $(2n)!$ se obține $\frac{S}{(2n)!} = \frac{1}{C_{2n}^0} - \frac{1}{C_{2n}^1} + \frac{1}{C_{2n}^2} - \ldots - \frac{1}{2C_{2n}^{2n-1}} + \frac{1}{C_{2n}^{2n}}$. Se arată că $\frac{1}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)$, relație pe care o folosim în egalitatea de mai înainte. **35.** Se scrie $S_k = \sum_{l=1}^{k} l!\,(1+l^2) = \sum_{l=1}^{k} l!\,(1 + l^2 + 2l - 2l) = \sum_{l=1}^{k} [(l+1)!\,(l+1) - 2l\,l!]$.

37. a) $T_8 = 120\ x^3a^7$; b) $T_5 = 126\ x^2y^2\sqrt{x}$; c) $T_8 = -3432\frac{1}{x^4\sqrt[3]{x^2}}$; d) $T_7 = 219648\ a^3b\sqrt{ab}$, $T_8 = -109824\ a^3b\sqrt[4]{b^3}$. **38.** a) $k = 2$; b) $k = 3$; c) $k = 16$; d) $k = 8$; e) $k = 8$. **39.** $k = 16$. **40.** $n = 15$. **41.** $n = 20$. **42.** $n = 6$. **43.** $n = 15$, $T_6 = 1001 \cdot 3^6$. **44.** $n = 8$, $T_5 = 70(1-x)^2$. **45.** $x_1 = \frac{1}{100\sqrt{10}}$, $x_2 = 10$. **46.** $m = 12$. **47.** $n = 6$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **48.** $x_1 = \frac{1}{10^4}$, $x_2 = 10$. **49.** $n = 7$, $T_5 = 35\ x^{2/3}$. **50.** $T_5 = 126\ a^{-1}$. **51** a) $T_{15} = -C_{24}^{10} \cdot 36$; b) $T_1 = 3^5$; $T_3 = C_{10}^2 \cdot 3^4 \cdot 7$; $T_5 = C_{10}^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; $T_7 = C_{10}^4 \cdot 3^2 \cdot 7^3$; $T_9 = C_{10}^2 \cdot 3 \cdot 7^4$; $T_{11} = 7^5$. **52.** Sînt 51 de termeni și anume T_{4k+1}, $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 50$. **53.** $T_i \notin \mathbf{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant 25$, $i \neq 1$ și $i \neq 15$ $(i \in \mathbf{N})$. **54.** Din dezvoltare avem $nm - (m+p)k = 0$, $nm - 11(m+p) = 1$, $nm - 23(m+p) = 5$. Scăzînd prima ecuația din celelalte două și făcînd cîtul se obține $\frac{k-11}{k-23} = \frac{1}{5}$, de unde $k=8$. Apoi, $m + p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ și deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg și pozitiv. Lăsăm continuarea pe seama cititorului. **55.** $n + 1$. **56.** Sînt 6 termeni raționali. **57.** $-C_7^0C_4^3 + C_7^1C_4^2 - C_7^2C_4^1 + C_7^3C_4^0 = -11$. **58.** a) Punem $x^4 = y^3 = 1$. Atunci dezvoltînd după formula binomului lui Newton și înlocuind x^4 și y^3 prin 1, obținem suma căutată a coeficienților. Astfel suma coeficienților este egală cu $(9-8)^{19} = 1$; b) Suma coeficienților dezvoltării $(8x^2 - 6y^3)^8$ este $(8-6)^8 = 256$. **59.** $(9-8)^n = 1$. **60.** a) Calculăm $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ și obținem că $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, pentru $k \leqslant 32$ și $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$, pentru $k \geqslant 33$. Deci cel mai mare este T_{34}; c) $k = 10$. **61.** Se studiază cazurile: n par și n impar. **62.** Trebuie să găsim un l, astfel încît suma primilor l termeni ai dezvoltării $(1 + 10^{-2})^{10}$ să difere de numărul $(1 + 10^{-1})^{10}$ cu mai puțin de 10^{-3}. Pentru aceasta este suficient ca suma termenilor dezvoltării, începînd cu cel de rang $l + 1$, să fie mai mică decît 10^{-3}. Se rezolvă inegalitatea $\sum_{k \geqslant l} T_{k+1} < 10^{-3}$, adică $\sum_{k \geqslant l} C_{10}^k (10^{-2})^k < 10^{-3}$. Însă $\sum_{k \geqslant 3} C_{10}^k < 1000$, de unde $\sum_{k \geqslant l} C_{10}^k \cdot (10^{-2})^k < 10^3 \cdot 10^{-6} < 10^{-3}$, pentru $l \geqslant 2$. Se observă că numai doi termeni ai dezvoltării nu sînt de ajuns, așadar trebuie să luăm neapărat primii trei termeni ai dezvoltării. **63.** Se consideră egalitatea $(1 - \sqrt{3}\,i)^{6n} = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{6n} = 2^{6n}$. Dezvoltăm membrul stîng după formula binomului lui Newton și partea reală a dezvoltării care este tocmai $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k$ este egală cu 2^{6n}. **64.** Se consideră egalitatea $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Se dezvoltă $(1+i)^n$ după formula binomului Newton și se egalează părțile reale și imaginare ale celor doi membri. **65.** Se consideră egalitatea $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \frac{\cos 2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$. **66.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$. **67.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $(1+i)^n$. **68.** Avem $(1+x)^n + (1-x)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C^{2k}x^{2k}$. Coeficienții din dezvoltare sînt pozitivi. Cea mai mare valoare se poate obține pentru $x = 1$, cînd se obține 2^n. **69.** a) Fie $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$. Din $C_n^k = C_n^{n-k}$, se obține $S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}$. Adunînd cele două egalități, avem $2 \cdot S_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) = 2^n \cdot n$, de unde $S_n = 2^{n-1}n$; b) Se procedează ca la pct a); obținem $S_n = (n+1) \cdot 2^{n+1}$; c) $S_n = (n-2)2^{n-1} + 1$; d) $S_n = (n+1)2^n$; e) $S_n = 0$; f) Avem $S_n = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n) = 2^{n-1}n - 2^n + 1$; g) Folosim formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ și obținem $S_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 - 2(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + 3(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) - \ldots + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}$. Dacă $n = 1$, $S_1 = 0$ și dacă $n > 1$, $S_n = 0$; h) Avem $S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$; i) $C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$, obținem $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \ldots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \ldots + (n+2)C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+2})$. Conform pct. a) și pct. b) se obține: $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1] = \frac{2^{n+1}n + 1}{(n+1)(n+2)}$; j) Suma devine $S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1})$. Dar suma dintre paranteze este egală cu 1 și deci $S_n = \frac{1}{n+1}$. **70.** a) Suma este egală cu coeficientul lui x^n din expresia $x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \ldots + x^{n-m}(1-x)^n$, care este egală cu $x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^n$. Se obține că suma căutată este egală cu $(-1)^m C_{n-1}^m$, pentru $m \leqslant n-1$ și este egală cu 0, pentru $m = n$; b) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^k din expresia $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+m}$, care este egală cu $\frac{1}{x}[(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n]$. Rezultă că suma este egală cu $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$, pentru $k \leqslant n-1$

și este egală cu C_{n+m+1}^{n+1}, pentru $k=n$; c) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ rădăcinile ecuației $x^k - 1 = 0$, adică $\varepsilon_l = \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k}$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Avem că $\varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s + \ldots + \varepsilon_k^s$ este egală cu k, dacă $k | s$ și este 0, dacă $k \nmid s$. Deci $\sum_{l=1}^{k} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \left(\sum_{l=1}^{k} \varepsilon_l^s\right) = k \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} C_n^{lk}$. Cum $1 + \varepsilon_l = 2 \cos \frac{l\pi}{k}\left(\cos \frac{l\pi}{k} + i \sin \frac{l\pi}{k}\right)$, atunci $\sum_{l=1}^{k} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=1}^{k} 2^n \cos^n \frac{l\pi}{k} \left(\cos \frac{nl\pi}{k} + i \sin \frac{nl\pi}{k}\right)$. Rezultă că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^{k} \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{nl\pi}{k}$; d) Fie ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ ca la punctul b) și considerăm suma $\sum_{l=1}^{k} \varepsilon_l^{-1} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l(\varepsilon_1^{l-m} + \ldots + \varepsilon_k^{l-m})$. Se folosește faptul că $\varepsilon_1^{l-m} + \ldots + \varepsilon_k^{l-m}$ este egală cu k, dacă $k | l - m$ și este egală cu 0, dacă $k \nmid l - m$. Se obține că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^{k} \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{(n-2m)l\pi}{k}$, pentru $k > 1$. **71.** a) Egalăm coeficienții lui x^n din cei doi membri ai egalității $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$. Se obține că suma căutată este C_{2n}^n; b) Se calculează coeficientul lui x^n din ambele părți ale egalității $(1 - x)^n (1 + x)^n = (1 - x^2)^n$. Se obține că suma este 0, pentru n impar, iar pentru $n = 2k$, număr par, suma este $(-1)^k C_{2k}^k$; c) Se poate folosi formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Se obține că suma căutată este 1, pentru $n = 3k$; 0, pentru $n = 3k + 1$; -1, pentru $n = 3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$; d) Suma căutată este egală cu 2^{2n}.

Capitolul XI

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE

1. a) 3, 8, 13, 18, 23; b) -2, 1, 6, 13, 22; c) $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{-1}{120}$; d) $0, \frac{1}{2}, \frac{-8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{-24}{5}$; e) $\frac{2}{4}, \frac{4}{7}, \frac{6}{10}, \frac{8}{13}, \frac{10}{16}$; f) $1, \frac{4}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{5}, \frac{6}{10}$; g) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. **2.** a) $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; b) $0, \frac{1}{100}, \frac{101}{10\,000} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000}$, deci $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{10^2}$, $a_3 = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}$. În general $a_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^{2n}} = \sum_{k=1} \frac{1}{10^{2k}}$; c) $\frac{2n \cdot 2(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$; d) $\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^n}$; e) $\frac{4n-1}{6n-1}$. **3.** a) Din $3n^2 - 2 = 190$, rezultă $3n^2 = 192$, de unde $n = 8$. Deci $a_8 = 190$; b) Obținem că $a_9 = 241$; c) nu este; d) Obținem că $a_{73} = 15985$.

4. $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2\alpha$, $a_3 = 3\alpha$, $a_4 = 4\alpha$, $a_5 = 5\alpha$; b) $a_1 = \beta$, $a_2 = 2\beta$, $a_3 = 4\beta$, $a_4 = 8\beta$, $a_5 = 10\beta$; c) $a_1 = \gamma$, $a_2 = 1$, $a_3 = \gamma$, $a_4 = 1$, $a_5 = \gamma$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = \alpha^2 - \beta^2$, $a_4 = \alpha\beta - \beta\alpha^2 + \beta^3$, $a_5 = \alpha^3 - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 2\alpha\beta$, $a_4 = \beta^2 + 2\alpha^2\beta$, $a_5 = 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3\beta$. **5.** $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 1$, $a_3 = 2^3 + 1$. Se demonstrează prin inducție matematică că $a_n = 2^n + 1$. **6.** $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. În general, $a_n = n^2$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **7.** $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1}{4}$. În general, $b_n = \frac{1}{n}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **8.** Demonstrația se face prin inducție matematică. **9.** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{5}{6}$. În general, $x_n = \frac{n+1}{n+2}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **10.** $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, $c_3 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$ și se arată prin inducție că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$. **11.** $a_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$, $a_3 = \frac{(\alpha^4 - \beta^4) - (\alpha^3 - \beta^3)}{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}$. Formula pentru a_n se demonstrează prin inducție matematică. **12.** a) Dacă $n = 2k$, atunci $S_{2k} = [0 + 1 + 2 + \ldots + (k-1)] + (1 + 2 + 3 + \ldots + k) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} k^2$. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $S_{2k+1} = (0 + 1 + 2 + \ldots + k) + (1 + 2 + \ldots + k) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k(k+1)$. Demonstrația se face prin inducție matematică; b) Se poate considera separat fiecare din cazurile; I) p par, q par; II) p par, q impar; III) p impar, q par; IV) p impar, q impar. **13.** a) 2, -1, -4, -7, -10, $a_n = 2 + (-3)(n-1)$; b) $a_1 = 23$, $a_2 = 35$, $a_3 = 47$, $a_4 = 59$, $a_5 = 71$, $a_n = 23 + 12(n-1)$; c) $a_1 = 21$, $a_2 = 22\frac{1}{2}$, $a_3 = 24$, $a_4 = 25\frac{1}{2}$, $a_5 = 27$, $a_n = 21 + \frac{3}{2}(n-1)$; d) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 19$, $a_n = 3 + 4(n-1)$. **14.** Avem $a_4 - a_2 = 2r = 6$, de unde $r = 3$. Obținem $a_1 = -10$, $a_3 = -4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 5$. **15.** $a_1 = -13\alpha$. **16.** $n = 8$. **17.** a) $a_1 = -5$, $r = 2$; b) $a_1' = 4$, $r' = 1$ și $a_1'' = 6$, $r'' = -1$; c) $a_1 = 2$, $r = 2$. **18.** a) $S_{100} = 15\,050$; b) $S_{100} = 33\,350$. **19.** Se demonstrează că $y_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2}$. Se obține $y_1 = \alpha + \beta$, și $r = \alpha$. **20.** Avem $S_1 = \alpha + \beta + \gamma = a_1$, $S_2 = 4\alpha + 2\beta + \gamma = a_1 + a_2$, $S_3 = 9\alpha^2 + 3\beta + \gamma = a_1 + a_2 + a_3$. Pentru ca $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, trebuie ca $\gamma = 0$. În acest caz $(\gamma = 0)$, șirul (a_n) este o progresie aritmetică. Avem $a_n = (2n-1)\alpha + \beta$. **21.** $r = \alpha$, $a_n = n\alpha$. **23.** Se verifică dacă este adevărată relația $b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}$. a) este progresie; b) este progresie; c) este progresie; d) nu este progresie; e) nu este progresie. **24.** Se observă că $a^2 + b^2 = \frac{(a + b^2) + (a - b)^2}{2}$. **25.** $a_1 = a - r$, $a_2 = a$, $a_3 = a + r$. Se aplică

teorema lui Pitagora şi se obţine $a = 4r$. Dacă $a_1 = 3r$, $a_2 = 4r$, $a_3 = 5r$ atunci $\frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_3}{5}$. **26.** a) $S_{2k} = -k$, iar $S_{2k+1} = k + 1$; b) $S_{2k} = -2k$, iar $S_{2k+1} = 2k + 1$. **28.** Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şirul din enunţ. Atunci: $a_2 - a_1 = \gamma_1$, $a_3 - a_2 = \gamma_2, \ldots, a_n - a_{n-1} = \gamma_{n-1}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ este o progresie aritmetică. Adunînd relaţiile, membru cu membru, se obţine $a_n = a_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}$. Cum $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 4, \ldots$ se obţine $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. **29.** Din egalitatea $a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}} + d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} = b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}} + c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}$ se deduce că $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$. **31.** Avem $T_{k+1} = C_m^k a^{m-k} b^k$ şi pentru $k = 5$, $T_6 = 21$. Mai mult, cum C_m^1, C_m^2, C_m^3 sînt în progresie aritmetică, rezultă $m = 7$. Se obţine ecuaţia $C_7^5 \cdot 2^{\lg(10-3x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$, adică $2^{\lg(10-3x)+(x-2)\lg 3} = 1$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. **32.** Ecuaţia din enunţ are exact patru rădăcini $\Leftrightarrow$ ecuaţia $y^2 + ay + a^4 = 0$ are două rădăcini pozitive y_1, y_2 cu $y_1 \neq y_2$. Dacă $y_1 < y_2$, atunci ecuaţia are rădăcinile $-\sqrt[4]{y_2}, -\sqrt[4]{y_1}, \sqrt[4]{y_1}, \sqrt[4]{y_2}$ scrise în ordinea crescătoare. Faptul că acestea sînt în progresie aritmetică înseamnă că $-\sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_2}) = \sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_1}) = \sqrt[4]{y_2} - \sqrt[4]{y_1}$ sau $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$, adică $y_2 = 81\, y_1$. Folosind relaţiile lui Viete, se obţine că $a = -\frac{9}{82}$ îndeplineşte condiţiile problemei. **33.** a) $b_1 = 3$, $b_2 = -6$, $b_3 = 12$, $b_4 = -24$, $b_5 = 48$; b) $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$, $b_5 = 48$; c) $b_1' = 5^7/3^5$, $b_2' = 5^6/3^4$, $b_3' = 5^5/3^3$, $b_4 = 5^4/3^2$, $b_5' = 5^3/3$; $b_1'' = -5^7/3^5$, $b_2'' = 5^6/3^4$, $b_3'' = -5^5/3^3$, $b_4'' = 5^4/3^2$, $b_5'' = -5^3/3$; d) $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 20$, $b_4 = 40$, $b_5 = 80$. **34.** $b_2 = 2\sqrt{3}$, $b_3 = 6\sqrt{2}$, $b_5 = 36\sqrt{2}$, $b_6 = 72\sqrt{3}$. **35.** a) 1, 2, 4, 8, 16 şi $-16, -8, -4, -2, -1$; b) $625, -375, 225, -135, 81$. **36.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **37.** a) Da; b) Da; c) dacă $\beta \neq 0$, nu; d) Da; e) Da. **40.** Din relaţia dată se obţine $y^2 = xz$. **41.** Scriem suma (notată cu S) astfel:

$$\begin{aligned} S = 1 &+ 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ &+ 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ &\quad + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + 2^{98} + 2^{99} + \\ &\qquad\qquad\qquad + 2^{99}. \end{aligned}$$

Deci $S = \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} + \frac{2(2^{99}-1)}{2-1} + \frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1} + \ldots + \frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1} + \frac{2^{99}(2-1)}{2-1} = (2^{100}-1) + (2^{100}-2) + (2^{100}-2^2) + \ldots + (2^{100}-2^{98}) + (2^{100}-2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 99 \cdot 2^{100} + 1$.
42. Se foloseşte formula $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, pentru $x \neq 1$.
44. Avem $3 = \frac{10-1}{3}$, $33 = \frac{10^2-1}{3}, \ldots, \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}} = \frac{10^n-1}{3}$. Obţinem: $S = \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}$. **45.** Dacă r este raţia progresiei aritmetice, iar q a celei geometrice, se arată că $r \geqslant 0$, iar $q \geqslant 1$. Pentru a demonstra că $a_n \leqslant b_n$, observăm că $a_1 q^{n-1} - a_1 - (n-1)r = a_1(q-1)[q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1 - (n-1)]$, iar numărul din paranteza mare este pozitiv. Egalitatea tuturor termenilor celor două progresii are loc numai în cazul în care $q = 1$ (şi deci $r = 0$). **47.** $3^{12/5}$, $3^{7/5}$, $3^{2/5}$, $3^{-3/5}$, $3^{-8/5}$. **48.** $S_1 = 1 \cdot 13 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 13 + \ldots + 76 \cdot 13$ este suma numerelor $\leqslant 1\,000$ care se divid cu 13. $S_2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,000$ este suma tuturor numerelor $\leqslant 1\,000$. Sumă căutată este $S_2 - S_1 = 462\,462$. **49.** Primul termen este 2 sau 62/5. **50.** $a = 100$, $b = 20$, $c = 4$. **51.** Primul termen este 70 sau 10.
52. Dacă n este par, atunci $a_1a_2 \ldots a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1}) \ldots = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. Dacă n este impar, atunci $a_1a_2 \ldots a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1}) \ldots \left(a_{\frac{n-1}{2}} a_{\frac{n+3}{2}}\right) a_{\frac{n+1}{3}} = (a_1a_n)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{a_1a_n} = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. **53.** $b = \frac{a+c}{2}$, $c^2 = ab$, $a = \frac{2bc}{b+c}$. Deducem că b şi c trebuie să verifice relaţia $2b^2 - bc = c^2$. **54.** Avem $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 5(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$; obţinem $q = \frac{1}{4}$. **55.** Deducem $2a_1 + 9b_1 = 31$, $b_1(1 + a_1) = 9$, de unde $a_1 = \frac{25}{2}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ şi $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. **56.** Avem $a_1 + r = b_1q$, $a_1 + 2r = b_1q^2 - 8$. Dar $a_1 = b_1$ şi se obţine $a_1 = \frac{r}{q-1}$, $a_1 = \frac{2r+8}{q^2-1}$. Deci r şi q satisfac relaţia $\frac{r}{q-1} = \frac{2r+8}{q^2-1}$, iar $a_1 (= b_1)$ este arbitrar. **57.** Avem $a_1 + r = \sqrt{a_1(a_1 + 3r)}$, de unde $a_1 = r$. Aşadar $a_4 = 4a_1$, $a_6 = 6a_1$, $a_9 = 9a_1$ şi evident $a_4 \cdot a_9 = a_6^2$; $q = \frac{3}{2}$. **58.** Dacă $0 < q < 1$ este raţia progresiei geometrice, atunci $p = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \ldots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{a_1 \cdot (a_1q^2) \ldots (a_1q^{2n-2})}{(a_1q)(a_1q^3) \ldots (a_1q^{2n-1})}$. După efectuarea calculelor obţinem $p = \frac{1}{q^n} < \frac{1}{q^{\frac{2n+1}{2}}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1q^{2n+1}}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}$.
59. Numărul boabelor de grîu este $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.
60. $2^{64} - 1$. **61.** a) Se efectuează ridicările la pătrat şi se însumează. Se obţine i) $\frac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)} + 2n$; ii) $\frac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)} - 2n$.
62. a) Scriem $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{r} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{r} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} = \frac{1}{r}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})$;

b) $\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}(\sqrt{q}-1)} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}(1-\sqrt{1/q})} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}(1-\sqrt{1/q})} =$
$= \frac{1}{\sqrt{q}-1} + \underbrace{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} + \dots + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}}_{n-1} = \frac{1+(n-1)\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}$. **63.** $S_1 =$
$= \frac{1}{a_1^p(q^p+1)}\left(1+\frac{1}{q^p}+\dots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ şi $S_2 = \frac{1}{a_1^p(q^p-1)}\left(1+\frac{1}{q^p}+\dots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ deci $\frac{S_1}{S_2} = \frac{q^p-1}{q^p+1}$, fiind raţia progresiei geometrice. **64.** Avem $a_k = S_k - S_{k-1} =$ $= (2k-1)a + b$. Este clar că şirul (a_k) este o progresie aritmetică în care $a_1 = a + b$ şi raţia $r = 2a$. **65.** Avem $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$. Să presupunem că pentru $k < n$, avem $a_k = \frac{1}{k!}$ şi să arătăm că $a_n = \frac{1}{n!}$. Într-adevăr, $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \dots + a_ka_{n-k} + \dots + a_na_0 = a_n + \frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!} + \dots +$ $+ \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} + \dots + \frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!} + a_n = 2^na_n$. Deci $\frac{1}{n!}(C_n^0 + C_n^1 + \dots +$ $+ C_n^k + \dots + C_n^n) - \frac{1}{n!} + 2a_n = 2^na_n$, sau $\frac{2^n-2}{n!} + 2a_n = 2^na_n$, de unde $a_n = \frac{1}{n!}$. Folosind varianta a doua a metodei inducţiei matematice, avem $a_n = \frac{1}{n!}$, pentru orice n. **66.** a) Avem $a_{k+1}^p - a_k^p = (a_k + r)^p - a_k^p =$ $= C_p^1ra_k^{p-1} + C_p^2r^2a_k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_k + C_p^pr^p$, $p \geqslant 1$, fiind un număr natural. Considerăm acum relaţiile, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, adică

$$a_2^p - a_1^p = C_p^1ra_1^{p-1} + C_p^2r^2a_1^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_1 + C_p^pr^p,$$
$$a_3^p - a_2^p = C_p^1ra_2^{p-1} + C_p^2r^2a_2^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_2 + C_p^pr^p,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n+1}^p - a_n^p = C_p^1ra_n^{p-1} + C_p^2r^2a_n^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_n + C_p^pr^p.$$

Adunînd aceste relaţii, membru cu membru, obţinem relaţia cerută. b) Pentru $p = 1$, relaţiile ne dau $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r, \dots, a_n - a_{n-1} = r$, ceea ce ne arată că $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia r. **67.** a) Avem $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Se verifică uşor că pentru orice k, $q \leqslant k \leqslant n-1$, avem $(b_{k-1} - q)(b_{k+1} - q) = (b_k - q)^2$, deci $b_1 - q, b_2 - q, \dots, b_n - q$ sînt în progresie geometrică. Raţia acestei progresii este egală cu α. Avem $b_n - q =$ $= (b_1 - q)\alpha^{n-1}$, de unde $b_n = (b_1 - q)\alpha^{n-1} + q$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$; b) $b_1 +$ $+ b_2 + \dots + b_n = (b_1 - q) + (b_2 - q) + \dots + (b_n - q) + nq$. Folosind pct. a) se obţine $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{(b_1 - q)(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} + nq$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

68. Punînd $f(n) = a_na_{n+1} \dots a_{n+k}$, avem $f(n+1) - f(n) = (k+$ $+1)ra_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}$, unde r este raţia. Dar $S = a_1a_2 \dots a_k + [(f(2) -$ $- f(1)) + (f(3)) - f(2)) + \dots + (f(n+1) - f(n))]\frac{1}{(k+1)r}$ de unde $S = a_1a_2 \dots$ $\dots a_k + \frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+k-1} - a_1a_2 \dots a_{k+1}}{(k+1)r}$. **69.** Punem $f(n) = \frac{1}{a_na_{n+1} \dots a_{n+k-2}}$ şi procedăm ca la exerciţiul precedent, folosind diferenţele $f(n) - f(n+1)$. Avem $S = \frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1a_2 \dots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k-1}}\right)$, unde d este raţia progresiei. **70.** a) Calculăm $qS_1 - S_1$ şi găsim $qS_1 - S_1 = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} + nq^{n+1}$ de unde $S_1 = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}q}{(q-1)^2}$. b) Procedînd analog ca la a) găsim $S_q =$ $= 2\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^3} - \frac{(2n-1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2} - \frac{n^2q^{n+1}}{q-1}$. **71.** Se observă că $a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} -$ $- a_{n-k+1}$. Calculînd apoi $\sum_{k=0}^{n} C_n^ka_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}\right)$ se găseşte $\sum_{k=0}^{n} C_n^ka_{k+1} = 2 \cdot \frac{2^nS_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_n^ka_{k+1}$, de unde rezultă relaţia căutată.

Capitolul XII

NOŢIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. a) 9; b) 1; c) 5; d) 8; e) 15; f) 20; g) 735. **2.** a) 40; b) 60; c) 50; d) 2. **3.** 149. **4.** 126. **5.** $a = 12$, $b = 48$ sau $a = 24$, $b = 36$ sau $a = 36$, $b = 24$ sau $a = 48$, $b = 12$. **6.** $a = 6$, $b = 216$ sau $a = 24$, $b = 54$. **7.** $a = 184$, $b = 176$ sau $a = 56$, $b = 16$. **8.** 1, 4, 8, 4, 4, 7, 5. **9.** a) 1, b) 1. **10.** 7^{7^7} este de forma $4k + 3 \Rightarrow 7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. **11.** $n \geqslant$ $\geqslant 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3$ (mod 10). Deci 3 este ultima cifră. Un pătrat perfect are ultima cifră 0 sau 1 sau 4 sau 5 sau 6 sau 9. Pentru $n = 4, 1! + 2! + 3! + 4! = 33$ nu este pătrat perfect. **12.** n este de forma $7k$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$. Se calculează n^3 pentru fiecare caz în parte. **13.** $n = 1$ restul este 2; $n = 2k$ restul este 2, $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$ restul este 0. **14.** a) Fie $d = (5n +$ $+ 3, 8n + 3) \Rightarrow d \mid -8(5k + 3) + 5(8n + 5) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$; b) $d = (33n +$ $+ 4, 22n + 3) \Rightarrow d \mid 3(22n + 3) - 2(33n + 4) \Rightarrow d = 1$. **15.** Se face analog cu **14.** **16.** Fie $d = (5a + 17b, 2a + 7b)$ şi $d' = (a, b)$; $d \mid 5(2a + 7b) -$ $- 2(5a + 17b) \Rightarrow d \mid b$; $d \mid 7(5a + 17b) - 17(2a + 7b) \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid d'$, dar $d' \mid d \Rightarrow$ $\Rightarrow d = d'$. **17.** $(a + b, a - b) = 2$ dacă a, b sînt prime impare; $(a + b, a -$ $- b) = 1$ dacă a sau b este egal cu 2. **18.** Se scrie $a = 7k + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 6)$ şi $b = 7l + s$ $(0 \leqslant s \leqslant 6)$. Se arată că $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow r = s = 0$. **19.** şi **20.** Se

scrie $n = 6k + r$ cu $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **21.** $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 2$; dacă n este impar $\Rightarrow 1^n + 4^n \equiv 2^n + 3^n \pmod 5 \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{10}$. **23.** $\frac{(m+n)!}{m!n!} = C_{m+n}^n$. **24.** $5 \mid n^2 - 3n + 6 \Rightarrow 5 \mid n^2 + 2n + 6 \Rightarrow 5 \mid (n+1)^2 + 5 \Rightarrow 5 \mid (n+1)^2 \Rightarrow 5 \mid n + 1 \Rightarrow n = 5k - 1$. **25.** $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2) \Rightarrow 6 \mid n(n+1)(n+2)$. **26.** $n = 7k + 1$ sau $n = 7k + 3$; **27.** $n = 3k \pm 1$. **28.** $n = 3k \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+1} + 2^{3k+2} \equiv 3 + 2^2 \equiv 0 \pmod 7$, $n = 3k + 3 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+3} + 2^{3k+3} \equiv 27 + 8 \equiv 0 \pmod 7$, $n = 3k + 2 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+5} + 2^{3k+4} \equiv 3^5 + 2^4 \equiv 0 \pmod 7$. Pentru celălalt exercițiu se ține cont că $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$. **29.** $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \equiv 2^{4n+1} + 3(-1)^{2n} \equiv (2^4)^n\, 2 + 3 \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod 5$. **30.** $153^n + 45^n - 28^n \equiv 1 + 1 - 0 \equiv 0 \pmod 2$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \pmod 5$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 11^n - 11^n \equiv 0 \pmod{17}$. Deci numărul este divizibil cu $2 \cdot 5 \cdot 17 = 170$. **31.** și **32.** Se consideră cazurile $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. **33.** $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 3 \cdot 9 + 4a\, 64^n \equiv 3(-2)^n + 4a(-2)^n \equiv (-2)^n(3 + 4a) \Rightarrow 11 \mid 4a + 3 \Rightarrow a = 11k + 2$. **34.** Se dezvoltă după binomul lui Newton, $(n+1)^n$. **35.** $C_p^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$. Cum $k < p \Rightarrow p$ este prim cu $1 \cdot 2 \dots k \Rightarrow p \mid C_p^k$. **36.** $2^p - 2 = (1+1)^p - 2 = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1}$ și se folosește **35.** **37.** $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1) \Rightarrow a = 2$. Dacă $k = mn \Rightarrow 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1)((2^m)^{n-1} + \dots + 1) \Rightarrow 2^k - 1$ nu este prim. Deci trebuie k este un număr par. **38.** a) impar $\Rightarrow a^n + 1$ este par $\Rightarrow$ nu este număr prim, contradicție. Scriem $n = 2^l n'$ cu n' impar $\Rightarrow a^n + 1 = (a^{2^l})^{n'} + 1 = (a^{2^l+1})((a^{2^l})^{n'-1} + \dots + 1) \Rightarrow n' = 1 \Rightarrow n = 2^l$. **39.** 3 nu divide $3n^2 - 1$. Pentru a arăta că 5 nu divide pe $3n^2 - 1$ se scrie că n este de forma $5k$, $5k + 1$, $5k \pm 2$ și se calculează $3n^2 - 1$. Analog pentru 7. **40.** Se scrie $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$; $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ unde $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ și $p_1, p_2, \dots, p_n$ sînt numere prime. Se obține $\alpha_i \leqslant 2\beta_i \leqslant 3\alpha_i \leqslant 4\beta_i \dots$ oricare ar fi $1 \leqslant i \leqslant n$. Din aceste inegalități se deduce că $\alpha_i = \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow a = b$. **41.** Orice număr de forma $4k - 1$ în descompunerea sa în factori primi conține un factor prim de forma $4l - 1$. Presupunem că există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \dots, p_n$ de forma $4k - 1$. Fie $N = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Există un număr prim p de forma $4t - 1$ care divide pe $N \Rightarrow$ există $1 \leqslant k \leqslant n$ astfel încît $p = p_k \Rightarrow p_k \mid N \Rightarrow p_k \mid -1$, contradicție. **42.** Același raționament ca la problema **41.** **43.** $E = (n^2 + 3n + 1)^2$. **44.** $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{p}{q} - \sqrt{n} \Rightarrow m = \frac{p^2}{q^2} + n - 2\frac{p}{q}\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbf{Q}$. Fie $n = p_1 p_2 \dots p_l$, p_i prime și $\sqrt{n} = \frac{r}{s} \Rightarrow p_1 p_2 \dots p_l = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow p_i \mid r (\forall) i$, $1 \leqslant i \leqslant l \Rightarrow p_i \mid s \Rightarrow \frac{r}{s}$ nu este ireductibilă. **45.** $p \geqslant 5 \Rightarrow p = 6k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 \Rightarrow 12(3k^2 \pm k) + 1$. **46.** Dacă $p = 3k \pm 1 \Rightarrow p^2 = \mathcal{M}3 + 1 \Rightarrow 8p^2 + 1$ se divide cu 3 deci nu este prim.

Deci $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73$, $8p^2 - 1 = 71$. **47.** $(0, 0)$; $(2, 2)$. **48.** $(x-2)(y-2) = 4 \Rightarrow$ soluțiile $(3, 6)$; $(4, 4)$; $(6, 3)$. **49.** Se scrie $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = xy + 1$. Dacă $x > 2$ și $y > 2 \Rightarrow x^2 - 1 > x + 1$ și $y^2 - 1 > y + 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > (x+1)(y+1) > xy + 1$. Dacă $x = 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y$ nu este natural. Dacă $x = 1 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$, nu este natural. **50.** $(285, 5)$; $(180, 10)$, $(5, 15)$. **51.** $[\sqrt{x}] = \frac{x-1}{4}$. Se ține cont că $\sqrt{x} - 1 < [\sqrt{x}] \leqslant \sqrt{x}$. Se obține $x = 13$ și $x = 17$. **52.** Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $12 \mid n^4 - n^2 - 24$. **53.** Dacă $n = p^\alpha m$ cu $m > 1$ și $(p, m) = 1$, atunci p nu divide pe C_n^p. Acum dacă $d = (C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1})$ și $d > 1$; există un număr prim q cu $q \mid d$. Cum $d \mid C_n^1 \Rightarrow q \mid n$ și putem scrie $n = q^\alpha m$ cu $(q, m) = 1$ și $m > 1$. Dar q nu divide $C_n^{q^\alpha}$ și deci q nu divide d, contradicție. Deci $d = 1$. **54.** Dacă $n = p^m$, atunci se arată că $(\forall) k$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$; p divide $C_{p^m}^k$. Apoi se arată că p^2 nu divide pe $C_{p^m}^{p^{m-1}}$. **55.** Fie N numărul format din ultimele 2 cifre ale lui 2^{999}. Avem $2^{999} \equiv N \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 2N \pmod{25}$. Dar $2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2N \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow N \equiv 13 \pmod{25} \Rightarrow N = 13 + 25k$. Cum $4 \mid 2^{999} \Rightarrow 4 \mid N \Rightarrow 4 \mid 13 + 25k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow N = 88$. **56.** $(2k+1) + (2k+2) + \dots + [2k + (2n-1)] = 2nk + n^2 = n(n + 2k)$. **57.** $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ și fiecare factor este strict mai mare ca 1. **58.** Scriem $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$. Dacă $A = 2^{2^{n-1}} - 1$, $B = 2^{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow A$ și B sînt prime între ele. Se demonstrează afirmația prin inducție ținîndu-se cont de considerațiile făcute. **59.** Se ține cont că orice divizor d al lui n este de forma $d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n}$ unde $0 \leqslant l_i \leqslant k_i$ $(\forall) i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. **60.** $N = \overline{a_{n-1} \dots a_0} = 10^{n-1} a_{n-1} + \overline{a_{n-2} \dots a_0}$. Dar $\overline{a_{n-2} a_{n-3} \dots a_0} < 10 \cdot 10 \dots 10 = 10^{n-1} \Rightarrow N > a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$. **61.** Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, $n + 1$ numere. Pentru fiecare a_i, există un număr natural $\alpha_i \geqslant 0$ astfel încît $n + 1 \leqslant 2^{\alpha_i} a_i \leqslant 2n$. Rezultă că există i, j astfel încît $2^{\alpha_i} a_i = 2^{\alpha_j} a_j$. Dacă $\alpha_i \leqslant \alpha_j \Rightarrow a_i = 2^{\alpha_j - \alpha_i} a_j \Rightarrow a_j \mid a_i$. **62.** Avem $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$. Cum $6 \mid a + b + c \Rightarrow a, b$ sau c este par $\Rightarrow 6 \mid 3abc$. **63.** Dacă $m = n + 2 \Rightarrow n^2 + 2n + 2 \mid n^4 + 4$ și $n^2 + 2n + 2 \mid m^4 + 4$. **64.** În 50! 2 apare la exponentul egal cu

$$\sum_{\alpha \geqslant 1} \left[\frac{50}{2^\alpha}\right] = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47.$$

În 100!, 2 are exponentul egal cu 97. **65.** Scriem $n + k = 2^{\alpha_k} u_k$, unde u_k este impar $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Fie α_{k_0} cel mai mare dintre toți α_k. Se arată că α_{k_0} este unic. În continuare

$$N = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{n + k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{q^{\alpha_k} u_k} = \frac{\text{Sumă de numere pare} + \text{un număr impar}}{q^{\alpha_{k_0}} \cdot u}$$

unde u este impar. Deci $N = \frac{p}{q}$ unde p este impar și q este par $\Rightarrow N \notin \mathbf{Z}$.

66. Se observă că $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5 = (n-1)n(n+1)(n+2) + 5 = 8k + 5$. Dar orice pătrat perfect este de forma $8k + 1$. **67.** Dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_9$, 5 sînt impare și 4 pare, de aceea trebuie să avem un factor de forma $a_k - k$, cu a_k impar și k tot impar. **68.** Cubul unui număr întreg nedivizibil cu 9 este de forma $9k \pm 1$. Dacă nici unul din numerele a, b sau c nu este divizibil cu 9 înseamnă că $a^3 + b^3 + c^3$ este de forma $9k' \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9 pentru nici o combinație de semne. **69.** Numerele $n = 65k \pm 4$ cu $k \in \mathbf{Z}$, satisfac condițiile. **70.** A se vedea **61.** **71.** Se demonstrează prin inducție după n. Pentru $n = 1$ obținem că din orice 3 numere se pot alege două cu suma pară. Dacă avem $2^{n+1} - 1$ numere le împărțim în $2^n - 1$ grupe de cîte două iar cel de-al $(2^{n+1} - 1)$-lea număr îl punem în prima grupă. Din acestea trei numere extragem două cu suma număr par. Numărul rămas îl așezăm în grupa a doua apoi repetăm raționamentul ș.a.m.d. **72.** Se ține cont de formula care dă numărul tuturor divizorilor unui număr (a se vedea **73**). **73.** Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$; $p_1, p_2, \ldots, p_r$ numere prime $\Rightarrow$ numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1)$ $\Rightarrow 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1) =$ numărul tuturor divizorilor. Acest număr este de forma $4m + 2 \Leftrightarrow \alpha_i + 1$ este impar $(\forall)i$, $1 \leqslant i \leqslant r \Leftrightarrow \alpha_i$ este par $(\forall)i$, $1 \leqslant i \leqslant r \Leftrightarrow |n|$ este un pătrat perfect. **74.** Fie n prim și $n = 10^k + 10^{k-1} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$. Suma cifrelor lui n este $k + 1$. Dacă $k + 1$ nu este prim $\Rightarrow k + 1 = r \cdot S$ cu $r > 1$ și $S > 1 \Rightarrow n$ nu este prim. **75.** De exemplu, $(n+1)! + 2$; $(n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1$. **76.** Dacă $m \geqslant n$ scriem $m = nq_1 + r_1$ cu $0 \leqslant r_1 \leqslant n$. Dacă $d = (a^m - 1, a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^m - a^n \Rightarrow d \mid a^{m-n} - 1 \Rightarrow d \mid (a^{m-n} - 1) - (a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^{m-2n} - 1$ ș.a.m.d. rezultă $d \mid a^{m-nq} - 1 \Rightarrow d \mid a^{r_1} - 1$. Scriem acum $n = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leqslant r_2 \leqslant r_1$. La fel ca mai sus obținem $d \mid a^{r_2} - 1$. Aplicînd algoritmul lui Euclid obținem $d \mid a^{(m,n)} - 1$. Este clar că $a^{(m,n)} - 1$ divide pe $a^m - 1$ și pe $a^n - 1$ și deci $d = a^{(m,n)} - 1$. **77.** Fie $N = n! - 1$. Se arată că $(N, k) = 1$ $(\forall)k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Deci N are în descompunerea sa un număr prim mai mare ca n. **78.** Dacă $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a$, b sînt cuburi perfecte. **79.** $2^{30} \equiv 0 \pmod 8$. $2^{30} = 4^{15} = (5-1)^{15} = \mathcal{M}5^3 - C_{15}^2\, 5^2 + C_{15}^1\, 5 - 1 = \mathcal{M}5^3 + 74$. Deci $2^{30} = 824 \pmod{1000}$. **80.** $39^{40} = (40-1)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 + 40 C_{30}^1 - 1 = \mathcal{M}10^3 + 199$. $38^{30} = (40-2)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2\, 2^{28} + 40 C_{30}^1\, 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 200 \cdot 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99 \cdot 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99\,824 = \mathcal{M}10^3 + 576$. $39^{30} - 38^{30} = \mathcal{M}1000 + 199 - 576 = \mathcal{M}1000 + 623$. Deci ultimele 3 cifre sînt 6, 2, 3.

Capitolul XIII

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI. ECUAȚII ALGEBRICE

1. a) $q = X^3 - X - 4$, $r = 8$; b) $q = X + 6$, $r = 9X^2 + 5X - 5$, c) $q = X^4 + 2X^3 + 2X + 11$, $r = 2X - 8$; d) $q = X^5 + X^3 - X^2 + 9X - 5$, $r = 35X^2 - 29X + 6$. **2.** $q = 2X^3 - X^2 + 4X - 3$, $r = 6$; b) $3X^4 + 2X^3 + 11X^2 + 22X + 45$, $r = 93$; c) $-2X^5 + 14X^4 - 47X^3 + 141X^2 - 423X + 1272$, $r = -3809$; d) $q = 2X^2 + 4X - 9$, $r = 27/2$. **3.** $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. **4.** Pentru $m \neq -1$ și $m \neq 2$ (rădăcinile ecuației $m^2 + 3m + 2 = 0$) gradul polinomului este 4; pentru $m = -1$ gradul polinomului este zero; pentru $m = -2$ gradul polinomului este doi. **5.** $f\left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}\right) = 20$. **6.** Se aplică binomul lui Newton și se obține $f\left(\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}\right) = 5$. **7.** $f\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\right) = 9$. **8.** $f\left(\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}\right) = 16$. **9.** I) Folosind binomul lui Newton se calculează $f(a + f(a))$ și se obține: $f(a)[1 + a_1 + 2a_2 a + a_2 f(a) + \ldots]$; II) $a = ka_0$, $k \in \mathbf{Z}$. **10.** $f = kX$, $k \in \mathbf{R}$. **11.** $f(2) = 4$ și se găsește $m = -\frac{3}{2}$. **12.** $f(1) = 5$; $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. **13.** Polinomul de grad minim este: $f = aX + b$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$ și se găsește $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. **14.** Scriem $f = (X - a)(X - b)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(a) = \alpha a + \beta$ și $f(b) = \alpha b + \beta$. Apoi se rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a), \\ \alpha b + \beta = f(b). \end{cases}$ **15.** Scriem $f = (X^2 + 1)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(i) = \alpha i + \beta$ unde $f(i) = (a_1 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - \ldots)$. **16.** $f(-2) = 0$, $m = -32$. **17.** $f(1) = 0$, $q = X^4 - 3X^3 - 2X + 3$. **18.** a) $f(-1) = (-2)^n - (2)^n = 0$; b) $(X-1)^n - (X+3)^n = [(X+1) - 2]^n - [(X+1) + 2]^n = -(X+1)[C_n^1(X+1)^{n-2}\, 2 + C_n^3(X+1)^{n-4} \cdot 2^3 + C_n^5(X+1)^{n-6}\, 2^5 + \ldots + C_n^{n-1}\, 2^{n-1}]$, pentru $n = 2k$. **19.** $f(\mathrm{i}) = (\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 1)^{4n+1} - \mathrm{i} = \mathrm{i}^{4n+1} - \mathrm{i} = 0$, $f(-\mathrm{i}) = 0$. **20.** Scriem $f = nX^{n+1}(X - 1) - X(X^n - 1) = (X - 1)[n X^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \ldots - X]$. **21.** Scriem $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3 = (X - 1)[(X^n - 1) + (X^{n-1} - 1) + (X^{n-2} - 1)]$. **22.** *Metoda I.* Scriem $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3} = [2(X^2 + 1) + X]^{2n-1} + [2(X^2 + 1) - X]^{2n+3}$. Dezvoltînd după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{2n-1} - X^{2n+3}$ se divide prin $X^2 + 1$. $f = X^{2n-1} - X^{2n+3} = X^{2n-1}(1 - X^4) = X^{2n-1}(1 + X^2)(1 - X^2)$. *Metoda a II-a.* Se aplică teorema lui Bézout se calculează $f(\mathrm{i})$ și $f(-\mathrm{i})$; $f(\mathrm{i}) = i^{2n-1} + i^{2n+3} = i^{2n-1}(1 + \mathrm{i})^4 = 0$. La fel pentru $f(-\mathrm{i})$. **23.** Fie ε o rădăcină oarecare a polinomului $X^2 + X + 1$. Se aplică teorema lui Bézout $f(\varepsilon) = \varepsilon^{6n-1} + \varepsilon + 1 = \frac{\varepsilon^{6n}}{\varepsilon} + \varepsilon + 1 = \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon}{\varepsilon} = 0$. **24.** *Metoda I:* Scriem

$(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5} = [(X^4 - 1) - X]^{2n+1} + [(X^4 - 1) + X]^{2n+5} =$. Aplicînd binomul lui Newton rezultă că este suficient să arătăm că $X^{2n+1} + (-X)^{2n+5}$ se divide prin $X^2 + 1$. Dar $-X^{2n+1} + X^{2n+5} = -X^{2n+1}(1 - X^4)$. *Metoda a II-a*: $f(i) = (1 - i - 1)^{2n+1} + (1 + i - 1)^{2n+5} = (-i)^{2n+1} + (i)^{2n+5} = 0$. **25.** *Metoda I*: $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X = [(X^2 - 1) + X]^{4n+1} - X$. Dezvoltînd după binomul lui Newton se constată că este suficient ca $X^{4n+1} - X$ să se dividă prin $X^2 - 1$. Se observă că $X^{4n+1} - X = X(X^{4n} - 1) = X(X^{2n} - 1)(X^{2n} + 1)$. *Metoda 2*: Se calculează $f(1) = 1^{4n+1} - 1 = 0$, $f(-1) = 0$. **26.** Se notează cu α rădăcina polinomului $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ care verifică $\alpha^5 - 1 = 0$ deci $\alpha^5 = 1$ și $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Aplicînd teorema lui Bézout $f(\alpha) = \alpha^{5a_1} + \alpha^{5a_2+1} + \alpha^{5a_3+2} + \alpha^{5a_4+3} + \alpha^{5a_4+4} = (\alpha^5)^{a_1} + (\alpha^5)^{a_2}\cdot\alpha + (\alpha^5)^{a_3}\cdot\alpha^2 + (\alpha^5)^{a_4}\cdot\alpha^4 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. **27.** $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X = [(X^2 + 1) + X]^{8n+1} - X =$ Dezvoltînd după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{3n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$. Dar $X^{8n+1} - X = X(X^{8n} - 1) = X[(X^8)^4 - 1]$ se divide cu $X^8 - 1 = (X^4 + 1)(X^4 - 1) = (X^4 + 1)(X^2 + 1)(X^2 - 1)$. **28.** Se folosește teorema lui Bézout $f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = (\alpha^2)^{n+3} + \alpha^{2n}\cdot\alpha^3 = \alpha^{2n}\cdot\alpha^6 + \alpha^{2n}\cdot\alpha^3 = \alpha^{2n}\alpha^3(\alpha^3 + 1) = 0$ (α este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$ deci care verifică relațiile $\alpha^3 = -1$ și $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$). **29.** $f = (X + 1)^3\left(-\dfrac{3}{8}X^2 + \dfrac{9}{8}X - 1\right) + 1$. **30.** Fie $f = (X - 1)^m - X^m + 1$. Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$ trebuie ca $f(\alpha) = 0$. Cum $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, atunci $f(\alpha) = \alpha^{2m} - \alpha^m + 1$. Dacă

$m = 6k \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^{12k} - \alpha^{6k} + 1 = +1 \neq 0,$

$m = 6k + 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0,$

$m = 6k + 2 \Rightarrow f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha + 1 \neq 0,\quad m = 6k + 3 \Rightarrow f(\alpha) = +3 \neq 0,$

$m = 6k + 4 \Rightarrow f(\alpha) = +\alpha + \alpha^2 + 1 \neq 0,\quad m = 6k + 5 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Valorile lui m căutate sînt $m = 6k + 1$ și $m = 6k + 5$. **31.** Se procedează la fel ca la problema precedentă. Se găsește $m = 6k + 2$ și $m = 6k + 4$. **32.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine $0\cdot P(-1) = -26P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. Pentru $x = 1$ egalitatea devine: $P(0) = -25P(1) \Rightarrow P(1) = 0$. Pentru $x = 26$ avem $26P(25) = 0$, $P(26) \Rightarrow P(25) = 0$. Rezultă că $P(X) = X(X-1)(X-25)Q(X)$. Înlocuind găsim o nouă relație $(X-2)Q(X-1) = (X-25)Q(X)$. Procedînd ca mai sus găsim că $Q(X) = (X-2)(X-24)R_1(X)$. Continuînd calculele se găsește că $R_1(X) = (X-3)(X-23)R_2(X)$ rezultă $P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)\ldots(X-24)(X-25)R(X)$. Înlocuind în egalitatea din enunț rezultă că $R(X-1) = R(X)$ adică polinomul fiind de grad n îndeplinește condițiile $R(0) = R(1) = R(2)\ldots R(n) = k$ deci $P(X) = kX(X-1)(X-2)\ldots(X-25)$. **33.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine $(-3)f(1) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu $X - 1$. Pentru $X = 3$ vom avea

$3f(3) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu $X - 3$. Rezultă că $f(X) = (X-1)(X-3)\cdot Q(X)$ și înlocuindu-se în relația dată $f(X)$ și $f(X+1)$ se obține $(X-1)Q(X) = (X-2)Q(X+1)$. Pentru $x = 2$, $Q(2) = 0$ deci $Q(X)$ se divide cu $X - 2$ deci $f(X) = (X-1)(X-2)(X-3)R(X)$ și înlocuind în egalitatea din enunț obținem: $X(X-1)(X-2)(X-3)R(X) = (X-3)X(X-1)(X-2)R(X+1)$ deci $R(X) = R(X+1)$ pentru orice $X \in \mathbf{R}$ adică $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots = R(n) = k$. Rezultă că polinomul de gradul n, $R(X) = K(\forall)X \in \mathbf{R}$. Deci $f(X) = K(X-1)(X-2)(X-3)$. **34.** Dacă $f(X) = \dfrac{1}{2}\left[cX^2 + (2b - c)X + 2a\right]$ $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci $f(n) = \dfrac{1}{2}\left[cn^2 + (2b - c)n + 2a\right] = \dfrac{1}{2}[cn(n-1) + 2(bn + a)]$, $n(n-1)$ se divide la 2 $(\forall)n \in \mathbf{Z}$. Deci $f(n) \in \mathbf{Z}$. Reciproc, fie $f(X) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c, \in \mathbf{Q}$. Dacă $f(n) \in \mathbf{Z}$ $(\forall)n \in \mathbf{Z}$ atunci și $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$, $f(-1) \in \mathbf{Z}$. Dar $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$. Deci $c \in \mathbf{Z}$ $a + b + c = K_1 \in \mathbf{Z}$, $a - b + c = K_2 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că există: $a = \dfrac{K_1 + K_2 - 26}{2}$, $b = \dfrac{K_1 - K_2}{2}$, $c = c$. Între $K_1 + K_2 - 2c$ și $K_1 - K_2$ relația $K_1 + K_2 - 2c = m \Rightarrow K_1 - K_2 = 2n - m$ deci $f(x) = \dfrac{1}{2}[mx^2 + (2n - m)X + 2c]$ unde $m, n, c \in \mathbf{Z}$. **35.** a) c.m.m.d.c. $= 2X^2 - 3X + 2$; b) c.m.m.d.c. $= X - 2$; c) c.m.m.d.c. $= X^2 + 2X + 2$; d) c.m.m.d.c. $= X^2 + 2X + 2$; e) c.m.m.d.c. $= 2X^2 + 5X + 3$. **36.** Se arată că c.m.m.d.c. $= 1$. **37.** Dacă $f(X)$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $X^n - 1$ și $X^m - 1$, atunci orice rădăcină a lui $f(X)$ este o rădăcină a lui $X^d - 1$ unde $d = (m, n)$ este un c.m.m.d.c. Invers, aplicînd teorema: Fie f și g două polinoame. Dacă d este c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci există polinoamele u și v astfel încît $d = uf + vg$, orice rădăcină a lui $X^d - 1$ este rădăcină a lui $f(X)$. Deci $f(X) = X^d - 1$. **38.** Fie $d = (m, n)$. Procedînd ca la exercițiul precedent se obține: dacă numerele $\dfrac{m}{d}$ și $\dfrac{n}{d}$ sînt impare, atunci un c.m.m.d.c. al polinoamelor date este $X^d + a^d$ dacă cel puțin unul dintre numerele $\dfrac{m}{d}$ și $\dfrac{n}{d}$ este par, un c.m.m.d.c. al polinoamelor este 1. **39.** a) $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 1)$; b) $X^6 - 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X - 1)\cdot(X^2 + X + 1)$; c) $X^8 - 1 = (X^4 + 1)\cdot(X^2 + 1)(X + 1)(X - 1) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)\cdot(X^2 + 1)\cdot(X + 1)(X - 1)$. **40.** $f = (X - 1)(X + 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1\right)$.

41. a) Folosind formulele lui Viète se obține $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -3$.

$x_4 = -2$; b) $m = -20$, $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = -3$; c) $m = 47$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = -\frac{1}{6}$; d) $m = -228$, $x_1 = -3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 3 - 2\sqrt{5}$, $x_4 = 3 + 2\sqrt{5}$; e) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; f) $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = -\frac{1}{3}$; g) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$; h) $m = 35$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -4$; i) $m = 24$, $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, $x_2 = 2$; j) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$, $x_3 = -7$; k) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{3}$ etc. **42.** a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ atunci $x_1^3 + px_1 + q = 0$, $x_2^3 + px_2 + q = 0$, $x_3^3 + px_3 + q = 0$. Se adună aceste relații membru cu membru și se obține: $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q + pS_1 = -3q - p\cdot 0 = -3q$. Pentru a obține pe $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, se înmulțesc ecuațiile de mai sus cu x_1, x_2 respectiv x_3 și se obține $S_4 = -pS_2 - qS_1$ (am notat $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ș.a.m.d.). Se procedează în continuare la fel și se obține S_7; b) Se procedează ca la punctul a). **43.** a) Desfacem parantezele și regrupăm termenii dînd factor pe m și se obține $(x-2)(x^2 + (2m-3)x + 3 - m) = 0$; b) Ținînd cont că $|x_2 - x_3| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2}$ și de relațiile dintre rădăcini și coeficienți pentru ecuația de gradul doi se obține: $m_1 = 4$, $m_2 = -\frac{1}{2}$. **44.** a) Ecuația se mai poate scrie $a^2(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) - 2ax(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) + (-2x^3 + x^2 + 8x - 4) = 0$; rădăcinile independente de a sînt $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$; b) Rădăcina care depinde de a, $x_4 = \frac{a^2+1}{2a}$ se găsește $a = 0$. **45.** a) Pentru ca ecuația să aibă o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$ trebuie ca $f(-1)\cdot f(1) < 0$ și $f(-1)f(1) = -(m+1)^2$; b) Folosind formulele lui Viète se obține $m = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; c) Relația se mai poate scrie $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 < 6x_1^2x_2^2x_3^2$; $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 = (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$. Din relațiile lui Viète se obține $m^2 - 4 < 0$; $m \in (-2, 2)$. **46.** Demonstrăm prin reducerea la absurd. Rezultă că toate rădăcinile sînt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} x_ix_j \Leftrightarrow (a+1)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right) + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -a^2 + a - 1 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$, contradicție deoarece $-a^2 + a - 1 < 0$ $(\forall) a \in \mathbf{R}$.

47. La fel ca la exercițiul de mai sus, se observă că $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = -m^2 - 2$. **48.** Scriem $f(X-1) = X^3 - 2X^2 + (a+1)X - a + b$. Aplicăm teorema lui Bézout și $f(-1) = -4 \Rightarrow -2a + b = 0$. Din relațiile lui Viète și la fel ca la exercițiul **42** se obține $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3a - 3b$ de unde $a - b = 3$. Se

obține $a = -3$, $b = -6$. **49.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus și se obține: $a = -\frac{1117}{14}$; $b = -\frac{2227}{14}$. **50.** Scriem $e^{f(x)} \leqslant 1$, $e^{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} \leqslant e^0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \leqslant 0$; $(x^2 - 1)(x-1)^2 \leqslant 0$; $x \in [-1, 1]$. **52.** Dacă α este o rădăcină dublă, atunci α este rădăcină a lui $f - D(f) = \frac{X^n}{n!}$. Deci $\alpha = 0$. Dar $f(0) = 1$, contradicție. **54.** Se calculează $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ca în exercițiul 42 și se obține $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5m$; $5m = 10$; $m = 2$. **55.** Se face transformarea $y = x + 1$ deci $x = y - 1$ și se înlocuiește în prima ecuație și se obține $y^3 - y^2(3-a) + y(3 - 2a + b) + a - b + c - 1 = 0$. De unde se găsește sistemul $a - b - c = 3$; $3a - b + c = 3$; $2b - c = -1$. Se obține $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. **56.** Se calculează $f(-1)\cdot f(1)$ și se arată că $f(-1)\cdot f(1) = -(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 5)$. Deci $f(-1)\cdot f(1) < 0$. **57.** Considerăm rădăcinile $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$, $x_4 = q^3x_1$. Aplicînd relațiile lui Viète se găsește $q = -1$, $x_1 = 2$; $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ și $m = 16$. **58.** a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$ din relațiile lui Viète; b) $-m^3 - 3m + 3 \geqslant 3(m+1)^2 \Rightarrow -m^3 - 3m^2 - 3m \geqslant 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$; c) Se calculează $f(1)$ și se găsește $m = -1$, rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}i$, $x_3 = -\sqrt{2}i$. **59.** a) Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația: $S_1^6 + 20S_1^2 - 144 = 0$ (unde $S_1 = x_1 + x_2$). Se rezolvă ecuația și se găsește că $S_1 = 2$; $S_2 = -2$; b) Rădăcinile ecuației sînt: $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = -1 + \sqrt{2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}$ sau $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$. **60.** Scriem a) $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p = (X^2 + 1)(X^2 - 2X) + (n+2)X + p$ de unde se obține că $n = -2$ și $p = 0$. b) $g(1) + g(2) + \ldots + g(n) = (1-2) + (2^2 - 2\cdot 2) + (3^2 - 3\cdot 2) + \ldots + (n^2 - n\cdot 2) = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$. **61.** $f(1) + f(2) + f(1) + \ldots + f(n) = a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + c(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + nd$. Din $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = n^4$ se găsește $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$. **62.** Se verifică rădăcina $x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$. Se formează relațiile Viète și se găsește că $x_2 + x_3 = -x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$ și $x_2x_3 = \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} + 1$. Se formează ecuația de gradul doi și se constată că $\Delta < 0$. **63.** **64.** Se procedează analog ca la exercițiul 62. **65.** Rădăcina reală este $z = 2$. Scriem $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = (z - 2)[z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i)] = 0$. **66.** a) Se aplică teorema lui Bézout și se obține sistemul de ecuații $c = 0$; $1 + a + b = 0$; $1 - a - b = 0$. Sistem care nu are

soluții; b) Ecuația admite ca rădăcină și pe $x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; se obține $a = -2, b = 1, c = -2$. Rădăcinile reale ale ecuațiilor sînt $x_3 = 2, x_4 = -1$. **67.** Aplicînd relațiile lui Viète se obține $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ și $m = -7$. **68.** Se aplică relațiile lui Viète și se ține cont de exercițiul **42.** **69.** Se folosesc relațiile lui Viète și se găsesc sistemele de soluții: $(a = \lambda,\ b = 0,\ c = 0)$, $(a = \lambda,\ b = -1,\ c = 1)$ $\lambda \in \mathbf{R}$. **70.** Teoremă: orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de grad $n \geqslant 1$ cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali, adică poate fi scris sub forma: $f = a_n(X - \alpha_1)^{K_1} \ldots (X - \alpha_p)^{K_p}(X^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \ldots (X^2 + b_1x + c_s)^{K_s}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ și $b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, b_s^2 - 4c_s < 0$. Aplicînd această teoremă și ținînd cont de ipoteză, f se scrie sub forma $f = g^2 \cdot h$ unde h nu are nici o rădăcină reală. Vom împărți rădăcinile complexe ale lui h în două grupe: rădăcinile complexe conjugate fac parte din grupe distincte. Făcînd produsul factorilor liniari care corespund rădăcinilor fiecărei grupe obținem polinoamele $h_1 + ih_2$ și $h_1 - ih_2$ și $h = (h_1 + ih_2)(h_1 - ih_2) = h_1^2 + h_2^2$. Deci $f = (gh_1)^2 + (gh_2)^2$. **71.** Dacă α este o rădăcină întreagă a lui f avem $f = (X - \alpha)g$. Deci $f(a) = (a - \alpha)g(0)$ și $f(a + 1) = (a + 1 - \alpha)g(1)$, de unde $a - \alpha \mid f(0)$ și $a + 1 - \alpha) \mid f(1)$. contradicție. **72.** Conform ipotezei există a_1, a_2, a_3, a_4 numere întregi distincte astfel încît $f - 1 = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a)_4g$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dar oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$ numărul $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)$ nu poate fi egal cu -2. Deci $f(a) - 1 \neq -2$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Pentru ultima afirmație din problemă răspunsul este negativ. **73.** Din teorema lui Bézout obținem $f - 12 = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)g$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $f(k) = 17 \Rightarrow (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)g(k) = 29$, 29 fiind prim $\Rightarrow$ cel puțin 2 factori dintre $k - a$, $k - b$, $k - c$, $k - d$, sînt egali cu $+1$ sau -1. De exemplu dacă $k - a = k - b = -1 \Rightarrow a = b$, contradicție. **74.** Se aplică același procedeu ca în problema **73.** **75.** a) Se desființează parantezele și se face o nouă grupare de termeni și se obține: $(x^2 + 3)(x^2 + mx + 2m) = 0$; b) La fel ca la exercițiul de mai sus se obține $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + m) = 0$. **76.** a) Se face schimbarea de variabilă $y = \frac{-3 - x}{x}$ și se obține ecuația $y^3 + 18y^2 + 60y + 16 = 0$. b) Se calculează

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\left[\frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{(x_1x_2x_3)^2}\right] + 3 = -16;\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3(x_1x_2x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = -16;\ y_1y_2y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 - 1}{(x_1x_2x_3)^2} = 0;$$

deci ecuația este $y^3 + 16y^2 - 16y = 0$. c) Se procedează ca la punctul b și se găsește $y_1 + y_2 + y_3 = 22$; $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 60$; $y_1y_2y_3 = 40$ deci ecuația este $y^3 - 22y^2 + 60y - 40 = 0$. d) Se face schimbarea de variabili $x = -3 - y$ și

se obține ecuația $y^3 + 6y^2 + 4y - 16 = 0$. e) Se face schimbarea de variabilă $x = -\frac{1}{y}$ și se obține ecuația $y^3 + 5y^2 + 3y - 1 = 0$. f) Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{1 + 3y}{-y}$ și se obține ecuația $16y^3 - 4y^2 - 6y - 1 = 0$. **77.** a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{k - 1}$ și se obține $y^3 - 3(k - 1)^2y + (k - 1)^3$. b) Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația $y^3 - 9y^2 + 18y + 24 = 0$. c) $y_1 = 6 - x_1^2$, $y_2 = 6 - x_2^2$, $y_3 = 6 - x_3^2$; $y_1 + y_2 + y_3 = 12$; $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 45$; $y_1y_2y_3 = 53$, deci ecuația este $y^3 - 12y^2 + 45y - 53 = 0$. **78.** Scriem

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 - x_2^2}{x_2^2} = \frac{2p}{x_1^2} - 1 + \frac{2p}{x_2^2} - 1 + \frac{2p}{x_3^2} - 1 = \frac{2p^3 - 3q^2}{q^2}.$$

79. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației atunci avem: $x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$; $x_2^4 - 2x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0$; $x_3^4 - 2x_3^3 + x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$; $x_4^4 - 2x_4^3 + 3x_4^2 - 4x_4 + 1 = 0$. Se împart egalitățile cu x_1, x_2, x_3 respectiv x_4 și se adună acestea membru cu membru obținîndu-se: $S_3 - 2S_2 + 3S_1 - 16 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0$ unde $S_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i$. Se fac calcule și se obține $S_3 = 2$. **80.** a) $x_1 = 3\sqrt{2}$, $x_2 = -3\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -1$; b) $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$; c) $x_1 = 6i$, $x_2 = -6i$, $x_3 = -\frac{1}{5}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$; d) $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $m = 23$; $n = 10$; e) $x_1 = \sqrt{2} + i$, $x_2 = \sqrt{2} - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_5 = 56$; g) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -64$; h) $x_1 = -i$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$; i) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 0$; $n = -1$, $p = 0$; j) $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $a = -37$, $b = 30$; k) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $m = -10$, $n = 1$. **81.** Se aplică teorema lui Bézout, $m = 1$, $n = p = -2$, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **82.** a) Se face substituția $x^2 = y$ și se obține $x_1 = \sqrt{2n^2 - 3}$, $x_2 = -\sqrt{2m^2 - 3}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$; c) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, $x_4 = -2\sqrt{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$,

$x_3 = -\frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 + i\sqrt{3}$; e) $x_1 = +\sqrt{m+1}$, $x_2 = -\sqrt{m+1}$, $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = -\sqrt{m}$; f) $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$, $x_3 = 1$, $x_1 = -1$. **83.** a) $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4}$, $x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4}$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3 + i\sqrt{55}}{8}$, $x_4 = \frac{3 - i\sqrt{55}}{8}$; c) $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; d) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; e) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}$. **84.** Se notează $x^2 = y$ și se obține ecuația $y^3 - (m-1)y^2 + (m - m^2)y + 2m - m^2 = 0$. Această ecuație se scrie $(y + 1)(y^2 - my + 2m - m^2) = 0$. Se obține rădăcina $y_1 = -1$ și rădăcinile y_2, y_3 ale ecuației $y^2 - my + 2m - m^2 = 0$. **85.** Se împarte cu x^2 și se notează $x + \frac{m}{x} = y$ și se obține ecuația $y^2 + y + 1 - 2m = 0$. **86.** Scriem $(x^2 + 1)(x - 1)^2 - ax^2 = x^4 - 2x^3 + (2 - a)x^2 - 2x + 1 = 0$ ecuația reciprocă. **87.** Se împarte cu x^2 și se notează $x = \frac{c}{x} = y$; se obține ecuația $y^2 + ay + b - 2c = 0$. **88.** $(x + z)^n = (x + \bar{z})^n \Rightarrow \left(\frac{x+z}{x+\bar{z}}\right)^n = 1$;

$$\frac{x+z}{x+\bar{z}} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x+a+bi}{x+a-bi} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n} + 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-i\,2\sin\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow \frac{x+a}{-b} = 2\,\mathrm{ctg}\,\frac{k\pi}{n}.$$

89. $(1 - X)f = a_0 + (a_1 - a_0)X + (a_2 - a_1)X^2 + \dots + (a_n - a_{n-1})X^n - a_nX^{n+1}$. Dacă $|\alpha| > 1 \Rightarrow |f(\alpha)(1 - \alpha)| \geqslant a_n|\alpha|^{n+1} - |a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1})\alpha^n| > a_n|\alpha|^{n+1} - |\alpha|^n(a_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1}) = a_n|\alpha|^n(|\alpha| - 1) > 0$. Deci $f(\alpha) > 0$ contradicție. **90.** Fie $f = \sum_{i\geqslant 0} a_iX^i$, $g = \sum_{i\geqslant 0} b_iX^i$; presupunem că $p \mid a_0$, $p \mid a_1$, ..., $p \mid a_{k-1}$, $p \nmid a_k$ și $p \mid b_0$,

$p \mid b_1$, ..., $p \mid b_{l-1}$, $p \nmid b_l$. Scriem $fg = \sum_{i\geqslant 0} c_iX^i$, $c_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$. Avem $c_{k+l} = a_0b_{k+l} + a_1b_{k+l-1} + \dots + a_ka_l + a_{k+1}a_{l-1}, \dots, a_{k+l}b_0 \Rightarrow p \nmid c_{k+l} \Rightarrow p \nmid fg$, contradicție. **91.** $f = c(f)f'$, $g = c(g)g'$; $f', g' \in \mathbb{Z}[X]$ și $c(f') = c(g') = 1$. Folosind problema **90** rezultă $c(f'g') = 1 \Rightarrow c(fg) = c(f) \cdot c(g)$. **92.** Presupunem că $f = gh$, $g = b_0 + b_1X + \dots + b_rX^r$, $h = c_0 + c_1X + \dots + c_sX^s$, $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Avem $a_0 = b_0c_0$, $a_1 = b_1c_0 + b_0c_1$, $a_2 = b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2$, ..., $a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \dots + b_0c_t$. Cum $p \mid a_0$ și $p^2 \nmid a_0 \Rightarrow p \mid b_0c_0 \Rightarrow p \mid b_0$ și $p \nmid c_0$. Din $p \mid a_1 \Rightarrow p \mid b_1c_0 \Rightarrow p \mid b_1$; $p \mid a_2 \Rightarrow p \mid b_2c_0 \Rightarrow p \mid b_2$. Continuînd din $p \mid a_r (r \leqslant n - 1) \Rightarrow p \mid b_r \Rightarrow p \mid a_n$, contradicție. **93.** $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$; $f = \frac{X^p - 1}{X - 1}$. Se arată că polinomul $g = f(X + 1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + C_p^1X^{p-2} + C_p^2X^{p-3} + \dots + C_p^{p-1}$ este ireductibil cu criteriul lui Eisenstein ($p \mid C_p^k$; $1 \leqslant k \leqslant p - 1$) și deci rezultă că f este ireductibil. **94.** Se aplică problema **93.** **95.** Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru $p = 3$ sau $p = 5$. **96.** Se aplică criteriul lui Eisenstein. **97.** $f = X^{2^n} + 1$. Se arată că polinomul $g = f(X + 1)$ este ireductibil cu criteriul lui Eisenstein $g = X^{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} C_{2^n}^k + 2$. Se arată că $2 \mid C_{2^n}^k$ $(\forall) 1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$. **98.** Polinomul este un produs dintre un polinom de gradul I și unul de gradul III $\Leftrightarrow$ polinomul are o rădăcină întreagă $\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ este o rădăcină $\Leftrightarrow a + b + 2 = 0$ sau $a - b + 2 = 0$. Avem: $X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X^2 + \alpha X + \beta)(X^2 + \alpha' X + \beta')$ ($\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta\beta' = 1$, $\alpha\beta' + \alpha'\beta = b$, $\alpha\alpha' + \beta + \beta' = a$, $\alpha + \alpha' = 0$. Dacă $\beta = \beta' = 1 \Rightarrow b = 0$ și $a = 2 - k^2$, $k \in \mathbb{Z}$ cu $k \neq \pm 2$. Dacă $\beta = \beta' = -1 \Rightarrow b = 0$ și $a = -2 - k^2$ cu $k \neq 0$. **99.** Presupunem $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Cum $f(a_i) = -1$, atunci $g(a_i)h(a_i) = -1$. Deci $g(a_i) = -1$ și $h(a_i) = 1$ sau $g(a_i) = 1$ și $h(a_i) = -1$ de unde $(g + h)(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Cum grad $(g + h) < n$ avem $g + h = 0$. Deci $f = -g^2$, contradicție deoarece coeficientul de grad maxim al lui f este 1. **100.** Dacă $f = (X - \alpha)g$ cu $\alpha \in \mathbb{Z}$ și $g \in \mathbb{Z}[X] \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \mid c$. Cum $(a + b)c = \text{impar} \Rightarrow a + b = \text{impar}$ și $c = \text{impar} \Rightarrow \alpha = \text{impar}$. Din egalitatea $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha(a\alpha + b)$ par $\Rightarrow a\alpha + b$ par $\Rightarrow a + b = \text{par}$, contradicție. **101.** Se verifică prin calcul direct. **102.** a) Se determină mai întîi λ_n; apoi din egalitatea $f - \lambda_nf_n = \lambda_0f_0 + \dots + \lambda_{n-1}f_{n-1}$; se determină λ_{n-1}, ..., în final se determină λ_0; b) rezultă din a). **103.** Se înlocuiește X cu a_1 și obținem α_0, apoi se înlocuiește X cu a_2 și se obține α_1; apoi se înlocuiește X cu a_3 și se obține α_2 ș.a.m.d. **104.** Folosind problema **102**, considerînd polinoamele $f_k = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-K+1)}{k!}$, $f = \lambda_0f_0 + \lambda_1f_1 + \dots + \lambda_nf_n$. Cum $f(0), f(1), \dots, f(n)$ sînt numere întregi se obțin $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Dacă $m > n$ avem $f_k(m) = C_m^k \Rightarrow f(m) \in \mathbb{Z}$. Dacă $0 \leqslant m \leqslant n$ avem $f_k(m) = 0$ pentru $k > m$ și $f_k(m) = C_m^k$ pentru $k \leqslant m$. Deci $f(m) \in \mathbb{Z}$. Analog în cazul cînd $m < 0$ obținem $f_k(m) \in \mathbb{Z}$ și deci $f(m) \in \mathbb{Z}$.

Capitolul XIV
PERMUTĂRI

2. a) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; b) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; c) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; d) $\sigma^{4k} = e$, $\sigma^{4k+1} = \sigma$, $\sigma^{4k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4k+3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $x = e$ (permutarea identică). **4.** $\sigma^{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma^{210} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{145} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **5.** $\sigma^{100} = e$, $\sigma^{151} = \sigma^{651} = \sigma$; **6.** a) $m(\sigma) = 2$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; b) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; c) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; d) $m(\sigma) = 7$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; e) $m(\sigma) = 6$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; f) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; g) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$. **7.** Cum $\varepsilon(x^2) = +1$ și $\varepsilon(u) = -1$ nu există nici o permutare. **8.** $\varepsilon(x^2) = +1$, $\varepsilon(u) = -1$; nu există nici o permutare. **9.** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **10.** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **11.** $i = 5$, $j = 2$; **12.** $i = 5$, $j = 6$. **13.** $m(\sigma) = n(n-1)$ și σ este întotdeauna pară; **14.** $4!\,(1 + 2 + 4 + 5 + 6)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4\,799\,952$. **15.** al 112-lea. **16.** Obținem $\frac{5!}{2!} = 60$ numere distincte, suma lor este $\frac{4!}{2!}(1 + 2 + 4 + 5 + 5)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 2\,266\,644$.
17. Fie $\sigma \in S_n$ pentru care P_σ este maxim. Fie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i < j$. Fie transpoziția $\tau_{ij} = (ij)$ și permutarea $\tau = \tau \circ \tau_{ij}$. Avem $P_\tau \leqslant P_\sigma$. Cum $P_\tau = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \left(a_k^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(k)}}\right)\left(a_i^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(j)}}\right)\cdot\left(a_j^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(i)}}\right)$ atunci din $P_\tau \leqslant P_\sigma$ prin simplificare se obține $\left(a_i^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(j)}}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(i)}}\right) \leqslant \left(a_i^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(i)}}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a^s_{\sigma(j)}}\right)$ de unde obținem $(a_i^r - a_j^r)(a^s_{\sigma(j)} - a^s_{\sigma(i)}) \leqslant 0 \Rightarrow a^s_{\sigma(j)} > a^s_{\sigma(i)} \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$. Cum i și j au fost aleși arbitrari $\sigma = e$ (permutarea identică). **18.** și **19.** Același raționament ca în problema **17.** Se arată că: a) σ = permutarea identică; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n \\ n & n-1 & \ldots 1 \end{pmatrix}$. **20.** a) Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots 1 \end{pmatrix}$; b) σ = permutarea identică. **21.** Vom dovedi că σ este permutarea identică. Prin absurd $\sigma \neq e$ $(\exists) 1 \leqslant i \leqslant n$, $\sigma(i) = j$ cu $j \neq i$. Notăm $\sigma(j) = k \Rightarrow k \neq j$. Fie $k = i$; presupunem $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow a_i a_j < a_j a_i$, contradicție. Analog în cazul $j < i$ obținem o contradicție. Deci $k \neq i \Rightarrow k \notin \{i, j\}$. Notăm $\sigma(k) = l$. Se observă că $l \neq j$ și $l \neq k$. Presupunem că $l = i$, dacă $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow i < k \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_i a_j < a_k a_l \Rightarrow a_i a_j < a_k a_i \Rightarrow j < k \Rightarrow a_j a_{\sigma(j)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_j a_k < a_k a_l \Rightarrow j < l \Rightarrow j < i$, contradicție. Analog dacă $j < i$ ne duce la o contradicție. Deci $l \neq i$ și deci $l \notin \{i, j, k\}$. Dacă notăm $m = \sigma(l)$, ca mai sus se arată că $m \notin \{i, j, k, l\}$. Continuînd procedeul obținem o infinitate de numere $\{i, j, k, l, m, \ldots\}$, contradicție.

22. Sînt permutările de forma: a) există $1 \leqslant i, j \leqslant n$ cu $j > i + 1$ astfel încît $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i$; $\sigma(j) = j + 2$, $\sigma(j + 1) = j$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; b) există un $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i + 2$, $\sigma(i + 2) = i$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; c) există un $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $\sigma(i) = i + 2$, $\sigma(i + 1) = i$, $\sigma(i + 2) = i + 1$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri. Numărul tuturor permutărilor cu 2 inversiuni este $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. **23.** Orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziții (i, j). Deci $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$. **24.** Se aplică același procedeu ca în problema 17.

Capitolul XV
MATRICE

1. $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 16 & 11 \end{pmatrix}$. **2.** $f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$; $f(A + B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **3.** $A^n = a^n I_2$, dacă $n = 4k$; $A^n = a^n A$, dacă $n = 4k + 1$; $A^n = -a^n I_2$, dacă $n = 4k + 2$; $A^n = -a^n A$, dacă $n = 4k + 3$. **4.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^n = 0$, dacă $n \geqslant 3$. **5.** $\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ a^{n-1}c + (n-1)a^{n-2} & a^{n-1}b & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{1}{2} n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** $A^n = A$, dacă n este impar și $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dacă n este par. **8.** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$.

9. $A^n = (-a)^n \begin{pmatrix} (-1^n) + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & -(1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$. **10.** $A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & n & n\frac{b}{a} + \frac{1}{2} n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(a^n - 1) & 0 \\ 0 & \frac{b}{b-1}(b^n - 1) \end{pmatrix}$.

12. $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} \\ 0 & y\dfrac{1-y^n}{1-y} & 0 \\ x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} \end{pmatrix}$. **13.** $x = 2;\ y = 3$ sau $x = 2,\ y = -3$. **14.** $u = 5;\ v = a,\ a \in \mathbf{C}$. **15.** $A^n = (2a)^{n-1}A$, deci $(2a)^{n-1} = 1$, de unde $a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n-1} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$ și deci $a = \frac{1}{2}$, dacă $n \in \mathbf{N}^*$ și în plus $a = -\frac{1}{2}$, dacă n este impar.

16. $A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $A = \pm\frac{\mathrm{i}\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
18. Luăm $b = a + r;\ c = a + 2r;\ d = a + 3r$ și, din ipoteză, rezultă $m - l = 2ar + r^2,\ p - m = 2ar + 3r^2,\ p - q = 2ar + 5r^2$ și se observă că $2(p - m) = m - l + p - q$. **19.** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{C}\right\}$. **20.** Scăzînd și adunînd ecuațiile obținem matricele $X + Y$ și $X - Y$. Repetăm procedeul și obținem: $X = \begin{pmatrix} +1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & +1 \end{pmatrix}$. **21.** $a = -1$. **22.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **23.** Fie L_1, L_2, L_3, L_4 liniile matricei căutate $L_1 = (0, 6, 0)$, sau $L_1 = (1, 1, 0)$; $L_2 = (1, 0, 1)$, sau $L_2 = (0, 12, 0)$, sau $L_2 = (2, 2, 0)$; $L_3 = (0, 0, 1)$ sau $L_3 = (1, 2, 0)$; $L_4 = (0, 1, 1)$ sau $L_4 = (1, 3, 0)$. **24.** Relațiile se verifică prin calcul direct. **25.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Dacă $D = [A, B] = AB - BA$ și punem

$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, atunci $\alpha = bc' - b'c$, $\delta = b'c - bc'$ și deci $\alpha + \delta = 0$. Cum D verifică egalitatea $D^2 - (\alpha + \delta) + (\alpha\delta - \beta\gamma)I_2 = 0 \Rightarrow D^2 = (\beta\gamma - \alpha\delta)I_2 \Rightarrow [[A, B]^2, C] = [D^2, C] = [(\beta\gamma - \alpha\delta)I_2, C] = (\beta\gamma - \alpha\delta)C - (\beta\gamma - \alpha\delta)C = 0$. **26.** Notăm E_{ij} matricea de ordinul n care are la intersecția liniei i cu coloana j elementul 1 și in rest zero. Cum $AE_{ij} = E_{ij}A$, oricare $i, j = 1, 2, \ldots, n$, rezultă ușor că A este o matrice de forma $a \cdot I_n$.
27. card $M = 2^{(m-1)(n-1)}$. **28.** Avem matricele $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$. Deci este suficient de verificat egalitatea cînd A_1, A_2, A_3, A_4 sînt matricele $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. **29.** 3) $A = (a_{ij})1 \leqslant j \leqslant n$, $B = (b_{ij})1 \leqslant j \leqslant n$ atunci $T_r(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right)$ și $Tr\,(BA) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right)$ și deci $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. 4) rezultă din 3).

Capitolul XVI
DETERMINANȚI

1. a) minus; b) minus; c) minus d) plus. **2.** $i = 3,\ j = 5$. **3.** Nici unul. **4.** Coeficientul lui x^4 este -6, coeficientul lui x^3 este 1. **5.** $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$. **6.** $\det A = \sum_{\sigma \in S_5} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{5\sigma(5)}$. Fiecare termen conține un factor care este egal cu zero, deci $\det A = 0$. **7)** a) Adunînd toate liniile la linia întîi, se obține la linia întîi numai elemente zero și deci determinantul este nul. b) Dăm factor comun pe a după prima coloană și b după coloana a doua. **8.** a) Cel puțin 2 linii au toate elemente egale cu același număr și deci determinantul este egal cu zero; b) de exemplu determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 2 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 & 2 \ldots 1 \\ 1 & 1 & 1 \ldots n \end{vmatrix} \neq 0$ și are $n^2 - n + 1$ elemente egale. **9.** Determinantul are o linie (coloană) nulă și deci este nul. **10.** Se obține ecuația $(x - 1)(4x^2 + 4x + 5\alpha - 4\alpha^2) = 0$ care are 3 rădăcini reale. **11.** $-\cos^3 2x$. **12.** Se obține ecuația $x^3 - 4x^2 - 2x + 5 = 0$ care are o rădăcină $x = 1$. **13.** Determinantul din membrul stîng se poate scrie ca suma a doi determinanți. **14.** Avem $\sqrt{1 + \cos x} = 2\sin\frac{x}{2}$, $\sqrt{1 + \sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, $\sqrt{1 - \sin x} = -\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Adunăm la coloana a treia coloana a doua, dăm factor comun pe $2\sqrt{2}$; la colaona a doua adunăm coloana întîi înmulțită cu (-1), rezultă că coloana a doua este egală cu coloana a treia și deci determinantul este nul. **15.** $-4(a-b)(b-c)(c-a)$. **16.** Linia $n-1$ se scade din linia n; linia $n-2$ se scade din linia $n-1$; linia 1 se scade din linia 2. Se dezvoltă după linia întîi. **17.** Se înmulțește coloana 2 cu 10, coloana 3 cu 10^2 ș.a.m.d. coloana n cu 10^{n-1} și se adună toate elementele la coloana 1. **18.** Rădăcinile sînt $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ..., $x_{n-1} = a_{n-1}$. **19.** Se scade linia p din linia $p+1$, linia $p-1$ din linia p ș.a.m.d., linia 1 din linia 2 și se dezvoltă după coloana 1; se obține un determinant de aceeași formă cu cel inițial în care p se înlocuiește cu $p-1$ (aici se folosesc identitățile $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$). **20.** Se adună liniile $2, 3, \ldots, n$ la prima linie și se ține cont că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. **21.** $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. **22.** $A \cdot B = I_n \Rightarrow \det AB = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow A$, B inversabile și B este inversa lui $A \Rightarrow BA = I_n$. **23.** Se pornește de la definiția determinantului $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \ldots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \bar{a}_{1\sigma(1)} \ldots \bar{a}_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det A}$. **24.** $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \det(A - iB) = d \cdot \bar{d} \geqslant 0$, unde $d = \det(A + iB)$. **25.** I) Se verifică prin calcul; II) $A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$. Din egalitatea I), $A^2 = (a+d)A \Rightarrow A^k = (a+d)^{k-1}A$. Dacă $A \neq 0 \Rightarrow (a+d)^{k-1} = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. Dacă $A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. **27.** $\det N = k$. **28.** $\det A = n(-1)^{n-1}$. **29.** $\det A = 1$. **30.** $\det A = (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1)$. **31.** a) Paritatea rezultă din faptul că toți termenii determinantului sînt numerele $+1$ și -1 și ei eventual se reduc doi cîte doi;

b) Valoarea maximă este 4, de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$ este 2, de exemplu pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Capitolul XVII

RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. a) 3; b) 4; c) 4; d) 4. **2.** a) Pentru $\alpha = -3$ sau $\alpha = 3$ rangul este 3, iar dacă $\alpha \neq -3$ și $\alpha \neq 3$ rangul este 4; b) 4; c) Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\beta = 1$ rangul este 2, iar în rest rangul este 3; d) Pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ și $\alpha = 0$, rangul este 2, iar în rest rangul este 3. **3.** a) Rangul matricei ori nu se schimbă, ori

se schimbă cu o unitate; b) Rangul matricei se schimbă cu cel mult o unitate. Rangul matricei se schimbă cu cel mult k. **4.** Dacă $a \neq 0$, $A^* = aA^{-1}$. Dacă $a = 0$, pentru $n \geqslant 2$ toți membrii egalităților sînt nuli. **5.** $AA^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$. $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A^t$. **6.** a) Pentru $\alpha \neq -8$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{\alpha + 8} \begin{pmatrix} 2\alpha + 4 & 6 & 4 - \alpha \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 - \alpha & -6 & 2\alpha - 4 \end{pmatrix}$; b) Pentru $\alpha \neq 0$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{8\alpha} \begin{pmatrix} 3\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; c) Nu; d) Da. Inversa este

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i & i \\ -i & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & i \\ i & i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

7. a) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1/\alpha_n \end{pmatrix}$; b) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i, matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 1/\alpha_n \\ 0 & 0 \ldots & 1/\alpha_{n+1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/\alpha_1 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) Da.

Inversa este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & 1 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$; d) Da. Inversa este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & (-1)^{n-4}\alpha^{n-4} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Avem $(I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}) = I - A^k = I$. **10.** Avem $I = I^t = (AA^{-1})^t = A^t(A^{-1})^t$. **11.** Nu, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Dacă A este nesingulară, atunci $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$. **12.** a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$; b) $\left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right]^2 =$

$= \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n)$. **13.** b) Avem $(I_n - E_n)\left(I_n - \frac{1}{n-1}E_n\right) = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{1}{n-1}E_n^2 = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{n}{n-1}E_n = I_n$.

14. a) Rezultă direct din proporționalitatea oricăror linii ale unei matrice de rang 1. b) $A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} (c_1 c_2 \dots c_n)$. **15.** Fie $A = XY$ ca la exercițiul precedent, componentele lui X fiind $x_1, x_2, \dots x_n$, iar ale lui Y fiind $y_1, y_2, \dots, y_n$. Atunci $\alpha = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. b) $(I_n + A)\left(I_n - \frac{1}{\alpha+1}A\right) = \left(I_n - \frac{1}{\alpha+1}A\right)(I_n + A) = I_n + A - \frac{1}{\alpha+1}A^2 = I_n$. În particular, pentru $A = -E_n$ din problema **12**, obținem $A^2 = -nA$, deci $(I - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}E_n$. **16.** $A^{-1}B$ are rangul 1 și după problema 15 rezultă că $(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}B$, unde $\alpha = YA^{-1}X$. Înmulțind cu A^{-1} la dreapta relația de mai înainte, se obține $(I_n + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1}$, de unde $(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1}$. Dacă efectuăm calculele în ordinea următoare: $A^{-1}X \to YA^{-1} \to \alpha = Y(A^{-1}X) \to \frac{1}{\alpha+1} \to \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}X \to \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha+1}A^{-1}X\right)(YA^{-1}) \to (A+B)^{-1}$, sînt necesare $3n^2 + 2n + 1$ înmulțiri și împărțiri. **17.** Dacă a_{ji}^* este elementul matricei A^{-1} de pe locul (j, i), c_i coloana a i-a, iar l_j linia a j-a a matricei A^{-1}, atunci se arată că $\bar{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{\alpha}{1 + \alpha a_{ji}^*} c_i l_j$. **18.** Fie A de ordin n și $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{C})$. Punem $f = A^{-1}e$ și $g = e^t A^{-1}$. Atunci avem $\bar{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{a}{1 + as} fg$, unde s este suma elementelor matricei A^{-1}. **19.** a) $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) Nu are soluții; f) $X = (1\ 1\ 1)$; g) $X = (-3 + 11i\ \ 3 + 9i\ \ -1 + 7i)$; h) Rezultă

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

și folosind faptul că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (problema 10) determinăm și inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Se obține in final

$$X = I_n - \frac{n-1}{n^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Capitolul XVIII

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 91\alpha/19$, $x_3 = -39\alpha/19$; b) $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = 5\alpha$. **2.** a) Sistemul are soluții nenule pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$. Dacă $\lambda \neq 0$ și $\lambda \neq -1$, $x = -\alpha$, $y = z = 0$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. Dacă $\lambda = 0$, $x = \beta$, $y = -(\beta + \gamma)$, $z = 0$, $t = \gamma$; β, γ fiind numere oarecare. Dacă $\lambda = -1$, $x = u$, $y = 0$, $z = -(u + v)$, $t = v$, u, v fiind numere oarecare; b) Pentru $\lambda \neq 1$ și $\lambda \neq -2$, sistemul are soluții nenule. Pentru $\lambda = 1$, $x = -(\alpha + \beta)$, $y = \alpha$, $z = \beta$; α, β fiind numere oarecare. Pentru $\lambda = -2$, $x = y = z = \gamma$; γ fiind un număr oarecare; c) Sistemul are soluții nenule dacă $\lambda = \frac{2}{3}$. În acest caz, $x = 34\alpha$, $y = -18\alpha$, $z = 40\alpha$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. **3.** a) Sistemul este incompatibil; b) Sistemul este compatibil, soluțiile sale sînt: $x = \frac{5\alpha}{8}$, $y = \frac{4-\alpha}{2}$, $z = \frac{8-\alpha}{8}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat: $x_1 = -2\lambda$, $y = \lambda + 1$, $z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare; d) Sistemul este compatibil nedeterminat; $x = -\lambda + \frac{\mu}{2} + 1$, $y = \lambda$, $z = 9 - \frac{3}{2}\mu$, $t = \mu$, unde λ și μ sint numere oarecare. **4.** Sistemul este compatibil $\Leftrightarrow 2a^2b^2 - 3a^2b + a^2 - b + 2 = 0$. **5.** a) Dacă

$\alpha \neq 1$ şi $\beta \neq 0$, sistemul are soluţie unică $x_1 = \frac{2\beta - 1}{\beta(\alpha - 1)}$, $x_2 = \frac{1}{\beta}$, $x_3 = \frac{2\alpha\beta - 4\beta + 1}{\beta(\alpha - 1)}$. Dacă $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, sistemul este compatibil, soluţia fiind $x_1 = 2 - \lambda$, $x_2 = 2$, $x_3 = \lambda$, λ fiind număr arbitrar. Dacă $\alpha = 1$, $\beta \neq \frac{1}{2}$ sistemul este incompatibil. Dacă $\beta = 0$ sistemul este incompatibil; b) Dacă $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ şi $\alpha \neq -2$; sistemul are soluţie unică; $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$, $x_2 = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{\beta(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$; $x_3 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$. Dacă $\alpha = \beta = 1$, sistemul este compatibil: $x_1 = 1 - \lambda - \mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$; λ, μ fiind numere arbitrare. Dacă $\alpha = \beta = -2$, sistemul este compatibil: $x_1 = \gamma$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \gamma)$, $x_3 = \gamma$, γ fiind un număr arbitrar. În rest, sistemul este incompatibil; c) Dacă $\alpha \neq 1$ şi $\alpha \neq -22$, sistemul are soluţia unică: $x_1 = -\frac{7\beta}{\alpha + 22}$, $x_2 = \frac{(\alpha + 8)\beta}{\alpha + 22}$, $x_3 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$, $x_4 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$. Dacă $\alpha = 1$, sistemul este compatibil, soluţia fiind: $x_1 = \beta - 2u - 3v - 3w$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = w$, unde u, v, w sînt numere arbitrare. Dacă $\alpha = -22$ şi $\beta \neq 0$ sistem incompatibil, iar dacă $\alpha = -22$ şi $\beta = 0$ sistemul este compatibil. **6.** În ambele cazuri o condiţie necesară şi suficientă este ca sistemul să fie omogen. **7.** O condiţie necesară şi suficientă este ca suma coeficienţilor combinaţiei liniare date să fie egală cu 1. **8.** a) rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ = rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$; b) rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ = rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. **9.** Condiţii analoage celor din problema precedentă. **10.** Cel puţin două dintre numerele a, b, c, d, e sînt egale cu -1; dacă nici unul nu este egal cu -1, atunci $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1$. **11.** $\alpha = be + cf + ad = 0$. **12.** a) Dacă $m \neq 1$, $m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sistemul are soluţia unică: $x = \frac{(4m - 3)(2m - 1)}{2(m - 1)(m^2 + m - 1)}$, $y = \frac{4m - 3}{2(m^2 + m - 1)}$, $z = \frac{6m^2 - 12m + 5}{2(m - 1)(m^2 + m - 1)}$; b) $m \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. **13.** Avem $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = 0$. Se observă că ecuaţia $(\lambda I_n - A)x = 0$ are soluţii nenule $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ este rădăcină a polinomului $P(X)$. **14.** a) $\lambda_1 = -ai$, $\lambda_2 = ai$. Vectorii proprii pentru $\lambda_1 =$

$= -ai$ sînt de forma $(\alpha, i\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda_2 = ai$ nu are vectori proprii. b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sînt: $(-7\alpha + 6\beta; 5\alpha - 3\beta; -6\alpha + 3\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Pentru $\lambda = 6$, vectorii proprii sînt $(\alpha; \alpha; -3\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$; c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sînt de forma $(0; \alpha; -\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda = 6$ sînt de forma $(3\alpha; 4\alpha; -2\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 0$ sînt de forma $(2\alpha + 3\beta; -\alpha; 0; -\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Vectorii prodrii pentru $\lambda = 2$ sînt de forma $(\alpha; -\alpha; \beta; \alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$; e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$. Vectorii proprii sînt de forma $(\alpha; 0; \beta; -\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. **15.** $P_A(X) = \det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Fie $f(X) = a_0 \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt rădăcinile polinomului. Rezultă $f(A) = a_0 \prod_{i=1}^{k}(A - x_i I_n)$ şi deci $\det(f(A)) = a_0(-1)^{nk} \prod_{j=1}^{n} f(x_j) = (-1)^k a_0^n \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{n}(x_j - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$. **16.** a) Avem $P_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$, iar $P_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A^{-1} - XI_n)$. Dacă λ este o valoare proprie a lui A şi cum A este inversabilă rezultă imediat că $\lambda \neq 0$. Mai mult, se arată că rădăcinile lui $P_{A^{-1}}(X)$ sînt inversele rădăcinilor polinomului $P_A(X)$; b) Fie $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, atunci $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$ şi $P_A(-\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda + \lambda_i)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$. De aici rezultă $P_A(\lambda) P_A(-\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare $\lambda \in \mathbf{C}$. Dar $A^2 - \lambda^2 I_n = (A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n)$ şi deci $P_{A^2}(\lambda^2) = (-1)^n P_A(\lambda) P_A(-\lambda)$, oricare $\lambda \in \mathbf{C}$. Aşadar, $P_{A^2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$, de unde $P_{A^2}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^2)$. Deci, valorile proprii ale matricei A^2 sînt $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; c) Analog cu raţionamentul de la punctul precedent. Se foloseşte identitatea $A^k - \lambda^k I_n = \prod_{i=1}^{k}(A - X\varepsilon_i I_n)$, unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ sînt rădăcinile de ordinul k ale unităţii. Rezultă că valorile proprii ale lui A^k sînt $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$; d) Fie $f(X) = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \ldots + a_{k-1} X + a_k$. Se poate aplica exerciţiul **15**; rezultă că valorile proprii ale lui $f(A)$ sînt $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale lui A. **17.** c) Fie x vectorul propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ. Se arată uşor că, dacă $f(X) = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \ldots + a_{k-1} X + a_k$, avem $f(A)x = f(\lambda)x$, adică x este vectorul propriu al matricei $f(A)$ care corespunde valorii proprii $f(\lambda)$.

Capitolul XIX

LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI

1. Elementul neutru $e = 0$. Elementele $x \neq 1$ sînt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x}{x-1}$. **2.** Elementul neutru $e = -1$. Elementele $x \neq 1$ sînt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x+3}{x-1}$. **3.** a) Nu este comutativă, nu este asociativă, nu are element neutru; b) $a_2 = 3a$; $a_3 = 7a$. În continuare se arată prin inducție. **4.** a) Este comutativă, asociativă elementul neutru este zero; 0 este singurul element simetrizabil; b) se arată prin calcul; c) $x = \sqrt{5}$. **5.** Este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru, orice element este simetrizabil. **6.** Se observă că $x \top y = \max\{x, y\}$. „T" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru; 0 este singurul element simetrizabil. **7.** Se arată mai întîi că $x, y \in A \Rightarrow x \circ y \in A$. I) Se arată prin calcul; II) $\frac{x+z}{1+\frac{xz}{a^2}} = \frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}} \Rightarrow (x-y)\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) = 0$. Cum $z \neq a \Rightarrow$ $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

8. a)

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

b) Nu este comutativă, nu este asociativă (de exemplu $(4*2)*3 \neq 4*(2*3)$; nu are element neutru.

9. a) $ax = b \Rightarrow$ are soluția $x = ab$; dacă $ax = ay = b \Rightarrow ab = x$ și $ab = y \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$; b) Fie $a \in A$ și $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Funcția $\sigma_a : A \to A$, $\sigma_a(x) = ax$ este bijectivă și $\sigma_a(a) = a$. În plus, dacă $\sigma_a(x) = y \Rightarrow \sigma_a(y) = x$. Din ipoteză rezultă că $x \neq a \Rightarrow \sigma_a(x) \neq x$. Mulțimea $A - \{a\}$ se împarte în perechi disjuncte $\Rightarrow A - \{a\}$ are un număr par de elemente $\Rightarrow A$ are un număr impar de elemente. **10.** „*" este comutativă și asociativă $\Leftrightarrow a = b = 0$ și $c \in \mathbf{R}$ sau $a = b = 1$ și $c \in \mathbf{R}$. **11.** a) $x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow axz + cz + a^2x + ac + bz = bxz + cx + ax + b^2z + bc \Leftrightarrow a = b$, $b + c = b^2$, $c + a = a^2$, $ac = bc \Leftrightarrow a = b = \lambda$, $c = \lambda^2 - \lambda$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$; b) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru $\Rightarrow xe + ax + be + c = x$ $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și $ex + ae + bx + c = x \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1 - e$, $b = 1 - e$ și $c = e(e-1)$. Dacă notăm $\lambda = 1 - e \Rightarrow a = b = \lambda$ și $c = \lambda^2 - \lambda \Rightarrow$ legea este asociativă. Invers, dacă legea este asociativă, din a) rezultă că elementul neutru $e = 1 - \lambda$; c) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru atunci $e - 1$ nu este simetrizabil. **12.** „$\perp$" și „$\top$" sînt comutative, asociative și au element neutru (0, respectiv 1). Pentru a arăta ultimele 2 egalități se scrie: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_r^{\gamma_r}$, unde p_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sînt numere prime și $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\gamma_i \geqslant 0$. În continuare se ține cont că $m \perp n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ și $m \top n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(m_i, n_i)}$. **13.** „$\top$"

și „$\perp$" sînt comutative și asociative, nu au element neutru. **14.** a) Legea „*" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru; fiecare $x \in \mathbf{R}$ are simetricul $-x$. Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, -1 este element neutru, orice element este simetrizabil (simetricul lui x este $x' = -x - 2$); b) Soluțiile sistemului sînt $(0, -1)$, $(-1, 0)$. **16.** Sînt n^{n^2} legi de compoziție dintre care $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sînt comutative și $n^{(n-1)^2+1}$ au element neutru. **17.** În $(\mathbf{C}^*, \top)$ elementul neutru este $-i$, dacă $z \in \mathbf{C}^* \Rightarrow -\frac{1}{z}$ este inversul lui z. **18.** Se arată că $x \neq 1$ și $y \neq 1 \Rightarrow x * y \neq 1$. Se arată prin calcul că „*" este asociativă, comutativă. Elementul neutru este -1. Dacă $x \in R_1$, $x' = \frac{2+x}{x-1}$ este inversul lui x (Se vede că $x' \in R_1$). **19.** Operația „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $z \in C_1 \Rightarrow z' = \frac{z}{1-z}$ este inversul său. Se vede că $z' \in C_1$. $i \circ i \circ i \circ i \circ i = 5 - 4i$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i = -(7 + 8i)$. **20.** Legea „$\perp$" este comutativă, asociativă, e este elementul neutru. Dacă $x \in \mathbf{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$ este inversul lui x. Se observă că $x' \in A$. **21.** Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $x \in R_1 \Rightarrow x' = \frac{x}{1-x}$ este inversul lui x. Se vede că $x' \in R_1$. **22.** Legea „*" este comutativă, asociativă, 1 este element neutru. Dacă $x \in R_2 \Rightarrow x' = \frac{3-2x}{2-x}$ este inversul lui x. Se verifică că $x' \in R_2$. **23.** Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $x \in Q_2 \Rightarrow x' = \frac{2x}{x-2}$ este inversul lui x. Se verifică că $x' \in Q_2$. **24.** Fie $x, y \in H \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}$, $y = d + c\sqrt{2}$. Dacă H este parte stabilă atunci $xy \in H$. Cum $xy = (ad + 2bc) + (ac + bd)\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow (ad + 2bc)^2 - k(ac + bd)^2 = 1$. Cum $a^2 - kb^2 = 1$ și $c^2 - kd^2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 2$. **25.** Elementul neutru este matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversul elementului $\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} x-4y & -2y \\ 2y & x+4y \end{pmatrix}$. **26.** Se verifică prin calcul că produsul a 2 elemente din G se găsește în G. Operația din G este asociativă deoarece este înmulțirea matricelor care este asociativă. Fiecare element din G este inversabil. **27.** Considerăm grupul G din exercițiul **26.** Dacă $A \in G$, se arată prin calcul: A^2 este matricea unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(\forall)$ $A \in G$. Deci, dacă $A, B \in G \Rightarrow A^2B^2 = B^2A^2$. Deci există

grupuri necomutative avînd proprietatea $x^2y^2 = y^2x^2$. **28.** Din $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow a^2b^2 = aba^{-1}b$. Ținînd cont că $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2b^2 = abb^{-1}a^{-1} = e$. Din $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow ba = ab^{-1} \Rightarrow b^2a^2 = bab^{-1}a$. Cum $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$ și deci $b^2a^2 = ba\, a^{-1}b^{-1} = e$. Cum $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow b = a^{-1}b^{-1}a = b^{-1}abb^{-1}a = b^{-1}a^2 \Rightarrow b^2 = a^2$. Din $a^2b^2 = e$ și $a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4 = e$. **29.** $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = a(ab)b \Rightarrow ba = ab$. Există grupuri necomutative cu proprietatea $(a * b)^3 = a^2 * b^3$ (a se vedea problema **37,** cap. XX). **30.** a) Operațiile „$\top$“ și „$\perp$“ sînt comutative, asociative, au element neutru: $(0, 1)$ este element neutru pentru prima, și $(1, 0)$ pentru a doua; b) Elementele simetrizabile față de legea „$\top$“ sînt de forma (a, b) cu $a \in \mathbf{Z}$ și $b \in \mathbf{Q} - \{0\}$; elementele simetrizabile față de legea „$\perp$“ sînt de forma (a, b) cu $a \in \{-1, 1\}$ și $b \in \mathbf{Q}$.; c) Legea „$\perp$“ nu este distributivă față de $\top$. **31.** Legea $*$ este comutativă, asociativă, dar nu are element neutru. **32.** Funcția $f: \mathbf{Z} \to M$, $f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un izomorfism. **33.** Avem $S_3 = \{e, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_1, \sigma_2\}$ unde e este permutarea identică; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ sînt transpozițiile: (12), (13), (23), iar $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definim funcția $f: S_3 \to G$ în felul următor: $f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f(\tau_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se arată că f este un izomorfism de grupuri. **34.** a) Se arată că $A^{5k} = I_5$, $A^{5k+1} = A$, $A^{5k+2} = A^2$, $A^{5k+3} = A^3$, $A^{5k+4} = A^4$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$; b) Inversa lui A este A^4; c) Se definește $f: G \to H$; $f(A^k) = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ $(\forall) k$, $1 \leqslant k \leqslant 5$; f este un izomorfism de grupuri. **35.** În grupul $(\mathbf{R}\ *)$, 0 este element neutru, inversul lui x față de operația „$*$“ este $-x$. **36.** Definim $f: G_1 \to G_2$ astfel: $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, $f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i$ este un izomorfism de grupuri. Definim $g: G_2 \to G_3$, astfel: $g(1) =$ permutarea identică, $g(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $g(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ este un izomorfism de grupuri. **37.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Q}, +)$. Dacă notăm $f(1) = a \in \mathbf{Q}$ atunci rezultă că $f(n) = na$ $(\forall)\, n \in \mathbf{Z}$. Deci $\mathbf{Q} = \{na \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Cum $f(1) \neq 0 \Rightarrow a = \frac{p}{q}$ cu $p \neq 0$ și

$(p, q) = 1$. Putem presupune $q > 0$. Atunci $\frac{1}{q+1} = ma = m\frac{p}{q} \Rightarrow q =$ $= (q+1)mp \Rightarrow q + 1 \mid q$, contradicție. **38.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{R}, +)$. Fie $\sqrt{2}, 1 \in \mathbf{R}$. Există $a, b \in \mathbf{Q}$, astfel încît $\sqrt{2} =$ $= f(a)$ și $1 = f(b)$. Cum $a \neq 0$ și $b \neq 0$ există $m, n \in \mathbf{Z}$, nenule astfel încît $ma = nb$. Atunci $f(ma) = f(nb) \Rightarrow mf(a) = nf(b) \Rightarrow m\sqrt{2} = n \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{6} =$ $= \frac{n}{m} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, contradicție. **39.** Presupunem că există un izomorfism $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{R}^*$. Fie $f(2) = a$, $a \neq 0$. Există $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ cu $b^3 = a$. Cum f este surjectivă, există $x \in \mathbf{Q}^*$ astfel încît $b = f(x) \Rightarrow b^3 = f(x^3) \Rightarrow f(x^3) =$ $= f(2) \Rightarrow x^3 = 2$. Deci $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, contradicție. **40.** Dacă G este grup, ecuațiile $ax = b$ și $ya = b$ au soluțiile $x = a^{-1}b$, respectiv $y = ba^{-1}$. Invers, cum ecuațiile $ax = a$ și $xa = a$ au soluții $\Rightarrow$ există element neutru e. Ecuațiile $ax = e$ și $ya = e$ avînd soluții $\Rightarrow$ există invers pentru orice $a \in G$. **42.** și **43.** Se verifică prin calcul. **44.** b) Fie $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $f(1) = n_0$. Se arată că $f = \varphi_{n_0}$; c) Cele două izomorfisme sînt $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) =$ $= x$ $(\forall) x \in \mathbf{Z}$ și $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = -x$ $(\forall) x \in \mathbf{Z}$. **45.** Dacă $f: \mathbf{Z} \to G$ este un omomorfism și punem $f(1) = g$ atunci $f(n) = ng = \underbrace{g + g + \ldots + g}_{n \text{ ori}}$. Deci f este perfect determinat de valoarea $f(1)$. Rezultă de aici că φ este o bijecție. **46.** a) Se verifică prin calcul; b) Fie $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $q = f(1)$. Dacă $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(n) = nq$. Dacă $x = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow m = nx \Rightarrow$ $\Rightarrow f(m) = f(nx) \Rightarrow nq = nf(x) \Rightarrow f(n) = \frac{m}{n} q \Rightarrow f(n) = xq \Rightarrow f = \psi_q$. **47.** Fie $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de grupuri, nenul. Există $x \in \mathbf{Q}$ astfel încît $f(x) = a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. Fie $n > 0$ un număr natural; există $y \in \mathbf{Q}$ astfel încît $ny = x \Rightarrow f(ny) = f(x) \Rightarrow nf(y) = f(x) = a \Rightarrow n \mid a$. Cum n este arbitrar $\Rightarrow a = 0$, contradicție. **48.** Fie $f: \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}$ un omomrfism și $x = \hat{k} \in$ $\in \mathbf{Z}_n$. Cum $nx = \widehat{nk} = \hat{0} \Rightarrow f(nx) = f(\hat{0}) = 0 \Rightarrow nf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f = 0$. **49.** a) $mf(\hat{1}) = f(m\hat{1}) = f(\hat{m}) = f(\hat{0}) = \bar{0}$; b) fie $f, g \in A$ astfel încît $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow f(\hat{1}) = g(\hat{1})$. Dacă $x = \hat{a} \in \mathbf{Z}_m$ este un element oarecare cu $0 \leqslant a \leqslant m - 1 \Rightarrow x = a \cdot \hat{1} \Rightarrow f(x) = f(a \cdot \hat{1}) = af(\hat{1}) = ag(\hat{1}) =$ $= g(a \cdot \hat{1}) = g(x) \Rightarrow f = g \Rightarrow \varphi$ injectivă. Fie $y = \bar{a} \in B \Rightarrow m\bar{a} = \bar{0}$. Dacă $x = \hat{n} \in \mathbf{Z}_m$, atunci definim $f: \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $f(x) = \overline{na}$. f este un omomorfism de grupuri și $\varphi(f) = f(\hat{1}) = \bar{a} \Rightarrow \varphi$ este surjectivă; c) card $A =$ card B.

50. Ordinul lui A_n este $\frac{n!}{2}$. **51.** Fie $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi $x \in H \Rightarrow H = \{xx_1, xx_2, ..., xx_n\} \Rightarrow x = xx_k \Rightarrow x_k = e$ (elementul neutru) $\Rightarrow e \in H \Rightarrow$ există un x_l cu $xx_l = e \Rightarrow x^{-1} = x_l \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow H$ subgrup. **52.** Se verifică prin calcul. **53.** Dacă $H \not\subset K$ şi $K \not\subset H \Rightarrow (\exists)x \in H, x \notin K$ şi $(\exists)y \in K, y \notin H$. Dar cum $x, y \in H \cup K \Rightarrow xy \in H \cup K \Rightarrow xy \in H$ sau $xy \in K$. În primul caz obţinem că $y = x^{-1}(xy) \in H$, contradicţie. În al doilea caz $x = (xy)y^{-1} \in K$, contradicţie. **54.** Se verifică prin calcul. **55.** Dacă $xy = z \in Z(G) \Rightarrow y = x^{-1}z \Rightarrow yx = (x^{-1}z)x = x^{-1}(zx) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = z \Rightarrow yx = xy$. **56.** A se vedea problema **27,** cap. III. **57.** Fie $\sigma \in Z(A_n)$ şi presupunem că $\sigma \neq e \Rightarrow$ există $a \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încît $\sigma(a) = b$ cu $b \neq a$. Cum $n \geqslant 4$, există c, d astfel încît a, b, c, d sînt distincte. Definim permutarea θ astfel: $\theta(a) = a$, $\theta(b) = c$, $\theta(c) = d$, $\theta(d) = b$ şi $\theta(x) = x \ (\forall)x \notin \{a, b, c, d\}$. Este clar că $\theta \circ \theta \in A_n$ şi deci $\sigma \circ (\theta \circ \theta) = (\theta \circ \theta) \circ \sigma \Rightarrow \sigma(\theta(\theta(a))) = \theta(\theta(\sigma(a))) \Rightarrow b = d$, contradicţie. Deci $Z(A_n) = \{e\}$. **58.** b) Fie $H \subset (\mathbf{Z}, +)$ un subgrup. Dacă $H = \{0\} \Rightarrow H = 0 \cdot \mathbf{Z}$. Dacă $H \neq \{0\} \Rightarrow (\exists)a \in H, a \neq 0$. Dacă $a < 0 \Rightarrow -a \in H$ şi $-a > 0$. Deci putem presupune că H conţine un număr strict pozitiv. Fie n_0 cel mai mic număr strict pozitiv care aparţine lui H. Avem clar că $n_0 \cdot \mathbf{Z} \subset H$. Fie $x \in H \Rightarrow (\exists)q, r \in \mathbf{Z}$ cu $x = n_0q + r$ unde $0 \leqslant r < n_0$. Avem $r = x - n_0q \in H$. Dacă $r \neq 0$, contrazicem alegerea lui n_0. Deci $r = 0 \Rightarrow x = n_0q \Rightarrow H \subset n_0\mathbf{Z} \Rightarrow H = n_0\mathbf{Z}$. **59.** Se arată prin calcul direct, ţinîndu-se cont de definiţia c.m.m.d.c. şi a c.m.m.m.c. a 2 numere. **60.** I) Fie $x \in aH \cap bH \Rightarrow x = ah, h \in H$ şi $x = bh'$ cu $h' \in H \Rightarrow ah = bh' \Rightarrow b^{-1}a = h'h^{-1} = h_1 \in H$. Fie $z \in aH \Rightarrow z = ak, k \in H$. Cum $b^{-1}a = h_1 \Rightarrow a = bh_1 \Rightarrow z = ak = b(h_1k) \Rightarrow z \in bH \Rightarrow aH \subset bH$. Analog se arată că $bH \subset aH$; II) Se arată că funcţia $\varphi: H \to aH$, $\varphi(h) = ah$, este o bijecţie. **61.** Din mulţimea de submulţimi de forma $\{aH\}_{a \in G}$ alegem pe cele distincte. Fie acestea $a_1H, a_2H, ..., a_rH$. Avem clar că $G = \bigcup_{i=1}^{r} a_iH$ şi $a_iH \cap a_jH = \varnothing$ pentru $i \neq j$. Deci $\text{ord}\, G = \text{card}\, G = \sum_{i=1}^{r} \text{card}\, a_iH = r \cdot \text{card}\, H = r \cdot \text{ord}\, H \Rightarrow \text{ord}\, H \mid \text{ord}\, G$. **62.** I) Fie mulţimea $\{e, a, a^2, ..., a^n, ...\}$. Cum G este finit, există k, j cu $k < j$ astfel încît $a^k = a^j$. Rezultă că $a^{j-k} = e$; II) Fie $\text{ord}(a) = n$; scriem $m = nq + r$ cu $0 \leqslant r < n$. Deci $e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = a^r \Rightarrow a^r = e$, ceea ce contrazice alegerea lui n; III) Se arată prin calcul direct; IV) Se aplică teorema lui Lagrange. **63.** $\text{ord}\ \widehat{25} = 24$; $\text{ord}\ \widehat{30} = 4$, $\text{ord}\ \widehat{55} = 24$, $\text{ord}\ \widehat{45} = 8$, $\text{ord}\ \widehat{80} = 3$. **64.** a) $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow xy = y^{-1}x^{-1}$. Cum $x^2 = e \Rightarrow x = x^{-1}$ şi deci $xy = yx$; b) Există grupuri necomutative cu proprietatea din enunţ

(a se vedea problema **37.,** cap. XX). **65.** Notăm $A = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ şi $B = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Avem $G = A \cup B$ şi $A \cap B = \varnothing$. Dacă $B = \varnothing \Rightarrow G = A \Rightarrow A$ conţine cel puţin 2 elemente $\Rightarrow$ există $x \neq e$ cu $x^2 = e$. Dacă $B \neq \varnothing$, fie $x \in B$. Atunci $x^{-1} \in B$ şi $x \neq x^{-1}$. Deci B conţine cel puţin 2 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}\} \Rightarrow$ există $y \in B$ cu $y \notin \{x, x^{-1}\}$. Se arată uşor că $y^{-1} \notin \{x, x^{-1}\}$ şi $y \neq y^{-1}$. Deci B conţine 4 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ se continuă procedeul. După un număr finit de paşi obţinem că B conţine un număr par de elemente. Deci A are un număr par de elemente şi deci există $x \in G$ cu $x \neq e$ şi $x^2 = e$. **66.** Dacă $x \in G$ şi $x^2 \neq e \Rightarrow (x^{-1})^2 \neq e$ şi deci în produsul $\prod_{x \in G} x$ se simplifică 2 cîte 2 elementele $x \in G$ pentru care $x^2 \neq e$. Deci $\prod_{x \in G} x = \prod_{\substack{y \in G \\ y^2 = e}} y$. **67.** Considerăm grupul $G = \mathbf{Z}_p - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. În acest grup singurul element de ordinul 2 este $-\hat{1}$. Deci $\prod_{x \in G} x = -\hat{1} \Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot ... \cdot \widehat{p-1} = -\hat{1} \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$. **68.** Se consideră grupul $G = \mathbf{Z}_p - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. **69.** Clar $(ab)^{mn} = e$. Presupunem $(\exists)\, k$, $0 < k < mn$, cu $(ab)^k = e \Rightarrow a^kb^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow (a^k)^n = (b^{-k})^n = (b^n)^{-k} = e \Rightarrow a^{kn} = e \Rightarrow m \mid kn \Rightarrow m \mid k$ (deoarece $(m, n) = 1$). Analog se arată că $n \mid k$. Deci $mn \mid k \Rightarrow mn \leqslant k$, contradicţie. **70.** Prin calcul se arată că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este grup comutativ. Fie $\varphi: \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, $\varphi(\dot{x}) = (\bar{x}, \hat{x})$ (am notat cu $\dot{x}$, clasa lui x în $\mathbf{Z}_{mn}$. Se arată că φ este omomorfism de grupuri. Dacă $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y}) \Rightarrow (\bar{x}, \hat{x}) = (\bar{y}, \hat{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ şi $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow m \mid x - y$ şi $n \mid x - y$. Deci $mn \mid x - y$ adică $\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \varphi$ este injectivă. Cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ au acelaşi număr de elemente, φ este şi surjectiv. Deci φ este un izomorfism. **71.** Fie $a \in G$, $a \in e$. Din teorema lui Lagrange obţinem că $\text{ord}(a) \mid \text{ord}\, G \Rightarrow \text{ord}\,(a) \mid p \Rightarrow p = \text{ord}\,(a) \Rightarrow G = \{e, a, a^2, ..., a^{p-1}\}$. Definim $\varphi : \mathbf{Z}_p \to G$, $\varphi(\hat{k}) = a^k$ unde $0 \leqslant k \leqslant p - 1$. Se arată că φ este un izomorfism. **72.** Dacă $n = \text{ord}(xy) \Rightarrow (xy)^n = e \Rightarrow e = \underbrace{xy \cdot xy \cdot ... \cdot xy}_{n \text{ ori}} \Rightarrow e = x(yx)^{n-1}y \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} \Rightarrow (yx)^n = e \Rightarrow \text{ord}\,(yx) \leqslant n$. Invers, se arată că dacă $m = \text{ord}\,(xy)$, atunci $\text{ord}\,(xy) \leqslant m$. Deci $\text{ord}\,(xy) = \text{ord}\,(yx)$. **73.** I) Se verifică prin calcul. II) Fie $a \in G$. Dacă $\text{ord}\,(a) = 4 \Rightarrow \langle a \rangle = G \Rightarrow G = \{e, a, a^2, a^3\}$. Se vede uşor că G este izomorf în acest caz cu $(Z_4, +)$. Presupunem că $(\forall)\, a \in G$, $\text{ord}\,(a) < 4$. Cum $\text{ord}\,(a) \mid 4$, atunci $\text{ord}\,(a) \leqslant 2$. Dacă $G = \{e, a, b, c\}$ deci $a^2 = b^2 = c^2 = e$. De aici rezultă uşor că $ab = ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$ şi deci G este izomorf cu grupul lui Klein, în acest caz.

Capitolul XX

INELE ŞI CORPURI

1. Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul unitate este $(1, 0)$ **2** Fie $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, descompunerea în factori primi a lui n, astfel încît $k_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ şi $(p_i, p_j) = 1$, pentru $i \neq j$. Avem că $\hat{x} \in N \Leftrightarrow p_i \mid x$, oricare ar fi i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Fie acum, $\hat{x}^k = 0$ şi $\hat{x}^m = \hat{x}$. Atunci $\hat{x}^{m^i} = \hat{x}$, pentru oricare $i \geqslant 1$. Dacă luăm $m^l \geqslant k$, atunci $\hat{x}^{m^l} = \hat{0}$ şi deci $\hat{x} = \hat{0}$. **3.** M este elementul unitate. Dacă M este formată dintr-un element, $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un corp cu două elemente. Dacă $M = \{a, b\}$ are două elemente, atunci inelul $\mathcal{P}(M)$ este $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$, unde $0 = \emptyset$ şi $1 = M$. Operaţiile sînt definite prin tabelele:

$+$	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
0	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
$\{a\}$	$\{a\}$	0	1	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	1	0	$\{a\}$
1	1	$\{b\}$	$\{a\}$	0

$\cdot$	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
0	0	0	0	0
$\{a\}$	0	$\{a\}$	0	$\{a\}$
$\{b\}$	0	0	$\{b\}$	$\{b\}$
1	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1

Dacă M are 3 elemente, inelul $\mathcal{P}(M)$ are 8 elemente. Tabelele adunării şi înmulţirii se fac analog celor precedente. **4.** Dacă $b \in M$, atunci $f(b)a = (ab + b_0 - 1)a = (ab)a + b_0a - a = 1$; deci $f(b) \in M$. Dacă $f(b) = f(b')$, atunci $ab + b_0 - 1 = ab' + b_0 - 1$, de unde $ab = ab'$. Înmulţind această inegalitate la stînga, cu a' obţinem $b = b'$ şi deci f este injectivă. Funcţia f nu este injectivă, căci de exemplu $b_0 \notin f(M)$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $b_0 = f(b)$, $b \in M$; atunci $ab + b_0 - 1 = b_0$, adică $ab = 1$, contradicţie. **5.** Fie un element $a \in A$, $a \neq 0$ şi $b \in A$ cu $ba = 1$. Avem că $b \neq 0$ şi fie $b' \in A$ cu $b'b = 1$. Atunci $(b'b)a = a$, adică $b' = a$. Deci $ab = ba = 1$, adică a este inversabil. **6.** Fie $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)$. La fel $g(1) = g(n) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$. Cum $f(1) = g(1)$ şi $f(n) = g(n)$ obţinem $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$. De aici rezultă că $f\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$ $(\forall)$ $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. **7.** Dacă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabil, există $\hat{b} \in \mathbf{Z}$ cu $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Deci $ab \equiv 1 \pmod{n}$, adică există $k \in \mathbf{Z}$ cu $ab - 1 = kn$, sau $ab + (-k)n = 1$. Această relaţie spune că $(a, n) = 1$. Reciproc este clar deoarece toate implicaţiile de mai sus sînt echivalenţe. **8.** Elementul neutru al legii $\perp$ este 0. Dacă $y \in A$ este inversul lui $1 - x$ în inelul A, atunci $1 - y$ este simetricul lui x faţă de legea $\perp$. **9.** Dacă se consideră $A = \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ şi matricele $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $(x * y) * z \neq x * (y * z)$. Deci, în general, legea $*$ nu este asociativă.

11. Trebuie ca $\begin{vmatrix} n & 12 \\ a & b \end{vmatrix} = \pm 1$, de unde rezultă că $(n, 12) = 1$. Deci $n \in \{1, 5, 7, 11\}$, adică mulţimea $A \cap \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ are 4 elemente. **12.** a) Se verifică uşor axiomele inelului; b) Se verifică uşor axiomele inelului; c) Aplicaţia $\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \to I$, definită prin $\varphi(m + n\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$ este un izomorfism de inele; d) Fie $d \neq d'$ şi să presupunem că ar exista un izomorfism de inele $f : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$. Se arată mai întîi că din $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, rezultă $f(a) = a$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Apoi, dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, atunci $f(x) = a + bf(\sqrt{d})$. Fie $f(\sqrt{d}) = m + n\sqrt{d'}$ şi deci $d = f(d) = f(\sqrt{d}\sqrt{d}) = (m + n\sqrt{d'})^2 = m^2 + d'n^2 + 2mn\sqrt{d'}$. De aici, se obţine $d = m^2 + d'n^2$ şi $2mn = 0$, relaţii care conduc la o contradicţie. **13.** Fie x, y elemente oarecare dintr-un inel boolean. Considerînd $(x + y)(x + y) = x + y$ şi $(x - y)(x - y) = x - y$, rezultă $y = -y$ şi $xy = yx$. Pentru $x_1, x_2, \dots, x_n$, elementul $u = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_ix_jx_k + \dots + x_1x_2 \dots x_n$, are proprietatea că $x_i = ux_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. **14.** Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul neutru la adunare este $0 = (0, 0)$, iar elementul unitate este $1 = (1, 1)$. Are divizori ai lui zero, de exemplu $(1, 0)(0, 1) = (0, 0) = 0$. Avem că $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ este inversabil dacă şi numai dacă $x_1 \in A_1$ şi $x_2 \in A_2$ sînt inversabile. **15.** a) Dacă $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, atunci $mn \mid x - y$ şi cum $(m, n) = 1$, rezultă $m \mid x - y$ şi $n \mid x - y$, deci $\hat{x} = \hat{y}$ şi $\bar{x} = \bar{y}$; b) Conform pct. a), φ este bine definită. Din definiţii rezultă că φ este omomorfism de inele. Să arătăm că φ este injectiv. Dacă $\varphi(\bar{\bar{x}}_1) = \varphi(\bar{\bar{x}}_2)$, atunci $(\hat{x}_1, \bar{x}_1) = (\hat{x}_2, \bar{x}_2)$, de unde $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ şi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, sau $m \mid x_1 - x_2$ şi $n \mid x_1 - x_2$. Cum $(m, n) = 1$, avem că $mn \mid x_1 - x_2$ şi deci $\bar{\bar{x}}_1 = \bar{\bar{x}}_2$. Mai mult, cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ au acelaşi număr de elemente, rezultă că φ este şi surjectivă. **16.** Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei **43**, $f = \varphi_n$, $n \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $n = \varphi_n(1) = \varphi_n(1 \cdot 1) = \varphi_n(1)\varphi_n(1) = n^2$, de unde deducem $n = 0$ şi $n = 1$. Astfel sînt doar două omomorfisme de inele de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$ şi anume φ_0 şi φ_1, adică cel nul şi cel identic. **17.** Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei **45**, cap. XIX, există $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ astfel încît $f(m) = m\hat{a}$, pentru orice $m \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $\hat{a} = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = \hat{a}^2$. Reciproc, dacă luăm un element $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $\hat{a}^2 = \hat{a}$, atunci aplicaţia $\varphi\hat{a} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi\hat{a}(x) = x\hat{a}$ este un omomorfism de inele. **18.** Fie $f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. După problema **49.** cap. XIX, dacă $\bar{a} = f(\hat{1})$, atunci $m\bar{a} = \bar{0}$. Mai

mult, $\bar{a}^2 = \bar{a}$. Reciproc, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $m\bar{a} = \bar{0}$ și $\bar{a}^2 = \bar{a}$, atunci aplicația $\varphi_{\bar{a}} : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\bar{a}}(x) = x\bar{a}$ este un omomorfism de inele. **19.** I) Dacă $(a, n) = 1$, există $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încît $au + vn = 1$. Soluția ecuației este $x = \widehat{ub}$; II) Se poate demonstra prin reducere la absurd; III) Dacă $d = (a, n)$ și $d \mid b$, fie $n = n_1 d$ și $b = b_1 d$. Fie, de asemenea, $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încît $au + nv = d$. Atunci $x_0 = \widehat{ub_1}$, este o soluție a ecuației. Atunci $x_k = x_0 + \widehat{kn_1}$, $k = 0, 1, \ldots, d - 1$, sînt d soluții distincte ale ecuației. **20.** Observăm că $ux - uy = u(x - y)$ și $(ux)(uy) = u^2xy = uxy$ pentru orice $x, y \in A$, deci A_1 este subinel al lui A. Pentru partea a doua fie $A_2 = (1 - u)A = \{(1 - u)x \mid x \in A\}$. Deoarece $1 - u \notin \{0, 1\}$ și $(1 - u)(1 - u) = 1 - 2u + u^2 = 1 - u$ rezultă conform celor de mai sus că A_2 este un subinel al lui A; c) și d) rezultă imediat acum din faptul că $u(1 - u) = u - u^2 = 0$. Din d) rezultă că scrierea lui $x \in A$ sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ este *unică*, deci $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ este bine definită. Faptul că $f : A \to A_1 \times A_2$, $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ (operațiile în A se efectuează „pe componente") este izomorfism rezultă acum imediat din c), d) și din unicitatea scrierii $x = x_1 + x_2$ (omomorfismul invers este $g : A_1 \times A_2 \to A$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$). **21.** a) Se verifică cu ușurință axiomele inelului; b) $f : A \to A_1$, $f(a) = (0, a)$ este izomorfismul căutat (se vede ușor că $A' = \{(0, a) \mid a \in A\}$ este un subinel al lui A_1). Operația $x \circ y = x + y - xy$ este asociativă și 0 este element neutru, deci $(A, \circ)$ este un monoid. Acum $x \in A$ este simetrizabil în $(A, \circ) \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.î. $x \circ y = y \circ x = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.î. $x + y - xy = y + x - yx = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.î. $(1 - x)(1 - y) = (1 - y)(1 - x) = 1 \Leftrightarrow (0, 1 - x) \in A_1$ este simetrizabil în A_1. **22.** a) Observăm că sistemul nu poate fi rezolvat prin metoda substituției, deoarece niciunul din coeficienții săi nu este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$. Scăzînd prima ecuație dintr-a doua obținem:

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ x + y = \hat{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{0}, \\ x + y = \hat{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \widehat{11}, \\ y = \hat{2}. \end{cases}$$

b) Deoarece $\hat{7}$ este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$, putem aplica și metoda substituției, scoțînd pe x din prima ecuație. Sistemul este incompatibil. **23.** a) Fie $z = m + ni$. Avem $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 0 \Leftrightarrow m = n = 0 \Leftrightarrow z = 0$; b) Fie $z = m + ni$, $z' = m' + n'i$. Avem $\varphi(zz') = \varphi((m + ni)(m' + n'i)) = \varphi((mm' - nn') + (mn' + m'n)i) = (mm' - nn')^2 + (mn' + m'n)^2 = (m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = \varphi(z)\varphi(z')$; c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[i]$, $z = m + ni$, $z' = m' + n'i \neq 0$. Atunci $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{m + ni}{m' + n'i} = \dfrac{mm' + nn'}{m'^2 + n'^2} + \dfrac{-mn' + m'n}{m'^2 + n'^2} i = \alpha + \beta i$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încît $|\alpha - u| \leqslant \dfrac{1}{2}$ și $|\beta - v| \leqslant \dfrac{1}{2}$ și punem $q = u + vi$. Se verifică că $r = z - qz'$, are proprietatea că

$\varphi(r) < \varphi(z')$; d) Avem $z \in \{-1, 1, -i, i\} \Rightarrow z$ este inversabil $\Rightarrow$ există $z' \in \mathbf{Z}[i]$ cu $zz' = 1 \Rightarrow \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z') = 1 \Rightarrow \varphi(z) = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 0$ și $n^2 = 1$ sau $m^2 = 1$ și $n^2 = 0 \Rightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$. **24.** c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, $z = m + ni\sqrt{2}$, $z' = m' + n'i\sqrt{2} \neq 0$. Atunci $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{m + ni\sqrt{2}}{m' + n'i\sqrt{2}} = \dfrac{mm' + 2nn'}{m'^2 + 2n'^2} + \dfrac{-mn' + m'n}{m'^2 + 2n'^2} i\sqrt{2} = \alpha + \beta i\sqrt{2}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $q = u + iv$, astfel încît $|u - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}$ și $|v - \beta| \leqslant \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Luînd $r = z - qz'$, obținem că $\varphi(r) < \varphi(z')$. **25.** a), b), c). Analog cu problemele precedente; d) Fie $z = m + n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ un element inversabil. Există deci $z' = x + y\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ a.î. $zz' = 1$, ceea ce conduce la sistemul $mx + 2ny = 1$, $nx + my = 0$. Condiția necesară și suficientă ca pentru $m, n \in \mathbf{Z}$, dați, sistemul precedent să aibă o soluție unică cu $x, y \in \mathbf{Z}$ este: $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ (condiția este evident suficientă, necesitatea rezultă deoarece conform primei ecuații $(m, n) = 1$ și se ține seama de forma termenului liber). Deci $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ inversabil. Definim acum recurent următorul șir de numere întregi: $x_0 = y_0 = 1$; $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$. Numerele de forma $x_n + y_n\sqrt{2}$ sînt toate distincte, deoarece deducem de mai sus că $x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ și evident $1 + \sqrt{2} \neq \pm 1$. Conform punctului b) al problemei (sau prin inducție după n) rezultă că $\varphi(z_n) = \varphi(x_n + y_n\sqrt{2}) = 1$, deci numerele distincte $x_n + y_n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sînt inversabile. **26.** Rezultă din problema **7** din acest capitol. **27.** Fie A un inel integru finit și $a \in A$, $a \neq 0$. Definim $\varphi_a : A \to A$ prin $\varphi_a(x) = ax$. Deoarece A este integru rezultă că φ_a este injectivă și cum A este finit este și surjectivă. Există deci $a' \in A$ cu $aa' = 1$. Aplicăm acum problema 5. **28.** Evident K este închisă la adunarea și înmulțirea numerelor reale. Mai trebuie verificat că orice element nenul din K are inversul (în raport cu înmulțirea numerelor reale) tot în K. Fie deci $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \neq 0$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă cel puțin unul din numerele a, b, c este nul (nu toate!) se verifică imediat că $\dfrac{1}{x} \in K$ prin amplificare cu conjugata numitorului. Dacă $abc \neq 0$ avem succesiv:

$$\frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a}\sqrt[3]{2} + \frac{b^2}{a^2}\sqrt[3]{4} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{b^3}{a^3} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{bc}{a^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}}$$

Amplificînd încă o dată cu conjugata numitorului obţinem că $\frac{1}{x} =$ $= \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} \in K$. *Observaţie*. Exact ca şi mai înainte se arată că dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$ nu este cubul unui număr raţional atunci $K_1 = \{a + b\sqrt[3]{\alpha} + c\sqrt[3]{\alpha^2} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ este un corp. **29.** Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de corpuri. În particular, f este un omomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ în el însuşi. Conform problemei **46.** cap. XIX rezultă că există $q \in \mathbf{Q}$ astfel încît $f(x) = qx$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$. Mai mult, $f(xy) = f(x)f(y)$ oricare $x, y \in \mathbf{Q}$ şi deci $qxy = q^2xy$, de unde $q = 0$ şi $q = 1$. Rezultă că singurul automorfism al corpului $\mathbf{Q}$ este cel identic. **30.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un automorfism al corpului $\mathbf{R}$. Din problema precedentă rezultă că $f(r) = r$ pentru $r \in \mathbf{Q}$. Fie acum $x > 0$. Există deci $y > 0$ cu $y^2 = x$ şi prin urmare $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x < y$ avem $-f(x) + f(y) = f(y - x) > 0$, adică f este strict crescătoare. Vom arăta că f este omomorfismul identic al lui $\mathbf{R}$. Presupunem prin absurd, că f nu este omomorfismul identic şi fie $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ cu $f(x) \neq x$. Dacă $f(x) < x$ alegem $r \in \mathbf{Q}$ cu $f(x) < r < x$ şi obţinem $f(r) = r > f(x)$, contrar monotoniei lui f. Analog, se ajunge la contradicţie pentru $f(x) > x$. **31.** Fie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un morfism de corpuri cu $f(x) = x$ pentru $x \in \mathbf{R}$. Dacă $f(\mathrm{i}) = \alpha$, atunci $-1 = f(-1) = f(\mathrm{i}^2) = (f(\mathrm{i}))^2 = \alpha^2$, deci $\alpha \in \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Pentru $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ obţinem $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x + f(\mathrm{i})y = x + \mathrm{i}y = z$ iar pentru $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ obţinem $f(z) = \bar{z}$. Deci singurele morfisme de corpuri $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ care invariază $\mathbf{R}$ sînt identitatea şi conjugarea, care sînt evident chiar automorfisme. **32.** c) Aplicaţia $f : \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \to K$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri. **33.** Fie K un corp comutativ. Să presupunem prin absurd că $f : (K, +) \to (K^*, \cdot)$ este un izomorfism de grupuri. Atunci $f(0) = 1$ şi există $x \in K$, $x \neq 0$, cu $f(x) = -1$. Avem $f(-x) = f(0 - x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{-1} =$ $= -1$. Cum f este injectivă rezultă $x = -x$, adică $2x = 0$. Deci $(2 \cdot 1_K)x = 0$ (1_K fiind unitatea corpului K), de unde $2 \cdot 1_K = 0$. Este clar că $2y = 0$, oricare $y \in K$. Avem $1 = f(0) = f(2.1) = (f(1))^2$. Dar $(f(1))^2 - 1 = (f(1) - 1)^2 = 0$. Deci $f(1) - 1 = 0$, adică $f(1) = 1$. Cum f este injectivă, rezultă $1 = 0$, contradicţie. **34.** Elementul unitate este $(1, 0)$. Dacă $(a, b) \neq (0, 0)$, atunci $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. $K_1 = \{(x, 0) \mid x \in K\} \subsetneq K \times K$ este un subcorp al lui $K \times K$ şi aplicaţia $f : K \to K_1$ definită prin $f(x) = (x, 0)$ este un izomorfism de corpuri. Ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are în corpul $K \times K$ soluţia $x = (0, 1)$. Fie $K = \mathbf{Z}_p$, p număr prim de forma $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$. Să presupunem că $x \in K$, are proprietatea $x^2 + 1 = 0$. Atunci după teorema lui Fermat (problema **68.** cap. XIX), rezultă $1 = x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$, contradicţie. **35.** Dacă $\alpha = \hat{1}$, rangul matricei este 2.

Dacă $\alpha \neq \hat{1}$, rangul este 3. **36.** Matricea este inversabilă numai pentru $\alpha = 0$, inversa în acest caz fiind $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **37.** G are 27 elemente. **38.** a) Sistemul este nedeterminat: $x = 4 + 3\lambda$, $y = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}_5$; b) Sistemul are soluţie unică: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **39.** Sistemul este compatibil nedeterminat, pentru orice $\alpha \in \mathbf{Z}_5$. Pentru $\alpha \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}\}$, un minor principal este dat de coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2, x_3. Pentru $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$, un minor principal este dat de coeficienţi necunoscutelor x_1, x_2, x_4. **41.** a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; b) $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; c) $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1)$; d) $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. **42.** Polinomul este ireductibil pentru $a = \hat{2}$. **43.** Conform teoremei lui Fermat, $x^6 = 1$ pentru $x \in \mathbf{Z}_7$. Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci pentru $x = a^{-1}$, obţinem: $(a^{-1})^6 + aa^{-1} + 5 = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$. Deci pentru $a \neq \hat{0}$, polinomul este reductibil. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{3})(X^3 + \hat{3})$. **44.** b) O matrice pătratică cu coeficienţi din K este inversabilă $\Leftrightarrow$ orice combinaţie liniară cu coeficienţi din K, care nu sînt toţi nuli, a liniilor (respectiv coloanelor) sale este nenulă. Deci pentru a găsi numărul matricelor din $GL_n(K)$ procedăm astfel: Considerăm mai întîi o linie arbitrară, nenulă, cu n elemente din K. Sînt $q^n - 1$ posibilităţi de alegere a acesteia. Apoi, alegem o linie care să fie independentă de prima (să nu se obţină din prima prin înmulţire cu un număr). Sînt $q^n - q$ posibilităţi de alegere a acesteia. Fie o altă linie care să nu fie combinaţie liniară de primele două. Sînt $q^n - q^2$ posibilităţi de alegere a acesteia ş.a.m.d. Se găsesc $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \ldots (q^n - q^{n-1})$ matrice cu proprietatea că nu există o combinaţie liniară cu coeficienţi nu toţi nuli a liniilor sale. Aceste matrice sînt toate elementele lui $GL_n(K)$.

Capitolul XXI
PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Dacă toate aplicaţiile f_n $(n \geqslant 1)$ sînt surjective, afirmaţia este evidentă. Pentru cazul general, se notează pentru fiecare $k \geqslant 0$ mulţimile $B_{k,t} = (f_{k+1} \circ f_{k+2} \circ \ldots \circ f_{k+t})(A_{k+t})$ oricare $t \geqslant 1$. Avem şirul descendent $A_k \supseteq B_{k,1} \supseteq B_{k,2} \supseteq \ldots \supseteq B_{k,t} \ldots$. Cum A_k este finită, există un t_0 astfel încît $B_{k,t_0} = B_{k,t_0+1} = \ldots$. Notăm $B_k = B_{k,t_0}$. Avem $B_k \neq \emptyset$. În continuare se arată că restricţia aplicaţiilor f_k la B_k este o funcţie surjectivă de la B_k la B_{k-1}. **2.** Fie $f(0) = \alpha$. Dacă $\alpha = 0$, din condiţia problemei, rezultă pentru $y = 0$, $f(f(x)) = f(x)$, oricare $x \in [0, 1]$. Dacă presupunem că $\alpha \neq 0$, se arată

prin inducţie matematică că $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(\alpha) = (n+1)\alpha$. Pentru n suficient de mare avem $(n+1)\alpha > 1$, ceea ce contrazice faptul că $f(x) \leqslant 1$, oricare $x \in [0, 1]$. Deci $\alpha = 0$, caz analizat mai înainte. Funcţia $g : [0, 1] \to [0, 1]$, definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \beta \\ 1, & \beta < x \leqslant 1, \end{cases}$ unde $\beta \in (0, 1)$, satisface condiţia problemei. **3.** Se înlocuieşte x cu $b - a - x$ şi se obţine egalitatea $\alpha f(b - x) + \beta f(a + x) = g(b - a - x)$. Împreună cu relaţia din enunţ se obţine un sistem liniar din care se deduce $f(a + x)$; din aceasta se obţine imediat $f(x)$. **4.** Avem $a_n = \sqrt{a_0^2 + n}$. Dacă $a_0 = 0$ se obţine şirul $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$, ... care conţine subşirul infinit $\{\sqrt{p}\}$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sînt numere iraţionale, Dacă $a_0 \neq 0$, considerăm subşirul dat de $n = (p - 1)a_0^2$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sale sînt numere iraţionale. **5.** Se arată mai întîi că $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$, de unde rezultă imediat că $[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] = 4n + 1$. **6.** Mulţimea cerută este $\{0, 1\}$. **7.** Pentru $k \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. **8.** Avem $(a + b - c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \geqslant 0 \Rightarrow 2(ac + bc - ab) \leqslant \frac{5}{3} \Rightarrow ac + bc - ab \leqslant \frac{5}{6} < 1$. **9.** Să presupunem că $x \leqslant y \leqslant z$. Atunci $z - x \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz} \Rightarrow 9(z - x)^2 \leqslant 8[(x - y)^2 + (y - z)^2]$ sau $2[(x - y)^2 + (y - z)^2] \geqslant [(x - y) + (y - z)]^2$, inegalitate adevărată în mod evident. **10.** $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow 7 > \frac{m^2}{n^2}$ sau $7n^2 > m^2$. Avem că $7 \nmid m^2 + 1$ şi $7 \nmid m^2 + 2$. Deci $7n^2 \geqslant m^2 + 3$, de unde $7 \geqslant \frac{m^2 + 3}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2}\left(m + \frac{1}{m}\right)^2$ sau $\sqrt{7} \geqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{mn}$. Egalitatea are loc pentru $m = 1$, dar în acest caz se vede că $\sqrt{7} > 2 > \frac{2}{n}$. **11.** Avem $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{a_{k+1}}{k+1}$ sau $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < a_{k+1}$. Dacă considerăm funcţia $S : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $s(k) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$, aceasta este crescătoare şi deci pentru $k < n$ avem $S(k) < S(n)$, adică inegalitatea din stînga. Pentru cealaltă inegalitate considerăm şirul $-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_1$ şi avem $\frac{(-a_n) + \ldots + (-a_{k+1})}{n - k} < \frac{(-a_n) + \ldots + (-a_1)}{n}$ **12.** Inegalitatea se scrie $0 \leqslant (n - 3)(x^4 + y^4 + z^4) +$

$+ (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2$. Rezultă $n = 3$. **13.** Pentru $m < n$, scriem suma $S = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} \max(i, k) + \sum_{k=i+1}^{n} \max(i, k)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} i + \sum_{k=i+1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m}(i^2 + (i+1) + (i+2) + \ldots + n)$, care calculată ne dă $S = \frac{m}{12}(m^2 - 1 + 3n^2 + 3n)$. Pentru $m = n$, scriem $S = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m} \max(i, k) + \sum_{k=1}^{m} \max(m, k)$. Dar, de mai înainte, se obţine $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m} \max(i, k) = \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. Este clar că $\sum_{k=1}^{m} \max(m, k) = m^2$; deci $S = m^2 + \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$ **14.** Observăm că pentru $m^2 \leqslant k < (m+1)^2$, avem $[\sqrt{k}] = m$. Scriem $S = \sum_{k=1}^{2^2-1}[\sqrt{k}] + \sum_{k=2^2}^{3^2-1}[\sqrt{k}] + \ldots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1}[\sqrt{k}] + n$ şi ţinînd seamă de observaţia de mai sus se obţine, după calcule, $S = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$. **15.** Se face schimbarea $y = x - 2$ şi se obţine inegalitatea $(m - 1)y^2 + (3m - 1)y + 2m - 6 > 0$, care trebuie să fie adevărată pentru orice $y > 0$. **16.** $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$. **17.** $a \neq 0$, $b = 0$ şi $a \neq 0$, $b = 1$. **18.** Se logaritmează ambii membri şi grupînd termenii se obţine $(a_2 - a_n)(\lg a_2 - \lg a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)(\lg a_{n-1} - \lg a_n) \geqslant 0$. Dar $a_{k-1} - a_k$ şi $\lg a_{k-1} - \lg a_k$ au acelaşi semn şi deci totul rezultă. **19.** Dacă $0 < x < 1$ egalitatea este evidentă. Dacă $x \geqslant 1$, atunci $x = 2^k \cdot 2^\alpha$, $k \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < 1$. De aici $\log_2 x = k + \alpha$ şi deci $[\log_2 x] = k$. Din $[x] \leqslant x$ rezultă $k \leqslant \log_2[x] \leqslant k + \alpha$ şi $[\log_2[x]] = k$. Deci $0 \leqslant \log_2 x - \log_2[x] \leqslant \alpha$, de unde $[\log_2 x - \log_2[x]] = 0$. Celălalt membru este, de asemenea, zero. **20.** Fie $s = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$. Avem $2s = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{1}{a_0a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} = \frac{1}{d}\left(\frac{a_1 - a_0}{a_0a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} + \cdots + \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}} + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{2n}{a_0a_{2n}}$. Deci $s < \frac{n}{a_0a_{2n}}$. Analog, se demonstrează cealaltă

inegalitate. **21.** Pentru $m = 1, n = 2 \Rightarrow f(2) = f(1)f(2) \Rightarrow f(1) = 1; f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 2 \cdot 2 = 4$. $2 < 3 < 4 \Rightarrow f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 2 < f(3) < 4 \Rightarrow f(3) = 3$. Presupunem că pentru $k < n$ avem $f(k) = k$. Fie $n = 2p \Rightarrow f(n) = f(2 \cdot p) = 2 \cdot f(p) = 2 \cdot p \Rightarrow f(n) = n$. Dacă $n = 2p - 1 \Rightarrow f(n + 1) = f(2p) = 2p$. $n - 1 < n < n + 1 \Rightarrow f(n - 1) < f(n) < f(n + 1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$. Deci $f = 1_{\mathbf{N}}$. **23.** Se poate demonstra prin inducție matematică. Fie n numărul maxim de cititori aflați la un anumit moment dat în sala de lectură. Dacă $n = 1$, atunci toți cititorii au intrat succesiv. Pentru a trece de la pasul n la pasul $n + 1$, observăm că problema rămîne evident aceeași dacă îi adăugăm presupunerea suplimentară că de fiecare dată al $(n + 1)$-lea cititor intrat în sală iese primul dintre cei $n + 1$. Fiecare astfel de cititor va scrie de fiecare dată numerele (n, n), problema revenind la pasul precedent. **24.** Fie $E = C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^n-1}^{2^{n-2}}$. Se arată prin calcul că $E + 2^{2n-1} C_{2^n-1}^{2^n-2}\left(\frac{1}{1(2^{n-1} - 1)} + \frac{1}{2(2^{n-1} - 2)} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-2} - 1)(2^{n-2} + 1)}\right)$ se divide cu 2^{2n}. Dar se arată că $C_{2^n-1}^{2^n-2}\left(\frac{1}{1(2^{n-1} - 1)} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-2} - 1)(2^{n-2} + 1)}\right)$ este multiplu de 2. (Se ține cont că $| 2\, C_{2^n-1}^{2^n-2}$).

25. $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{30}} < 6^5 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{30}} < 6^{10}$. Dar $5^{2\sqrt{30}} < 5^{11}$. Se arată că $5^{11} < 6^{10}$. Într-adevăr, $6^{10} = (5 + 1)^{10} = 5^{10} + C_{10}^1 \cdot 5^9 + C_{10}^2 \cdot 5^8 + C_{10}^3 \cdot 5^7 + \ldots + C_{10}^9 \cdot 5 + C_{10}^{10} > 5^{10} + 10 \cdot 5^9 + 5 \cdot 9 \cdot 5^8 + 120 \cdot 5^7 > 5^{11}$. **26.** Fie $\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101}$. Avem $\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101} - (\sqrt{26} - 5)^{101} + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a + \frac{1}{(\sqrt{26} + 5)^{101}} < a + \frac{1}{(2 \cdot 5)^{101}} = a + \frac{1}{100^{101}} = a,\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ ori}}1$ $(a \in \mathbf{Z})$. **27.** Dacă notăm $S_m = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m$, observăm că $S_0 + S_{n-1} = S_1 + S_{n-2} = \ldots = S_{n-1} + S_0 = 2^n$. **28.** Se poate demonstra folosind varianta a doua a metodei inducției matematice, după numărul b al băieților. **29.** Numerele de forma $n_k = 3^k$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **30.** $p = 3$. **31.** Presupunem prin absurd, că există $n \mid 2^n - 1$. Fie p cel mai mic număr prim care divide pe n, iar k cel mai mic număr natural astfel încît $p \mid 2^k - 1$. Avem $p \mid 2^k - 1$ și $p \mid 2^{p-1} - 1$ (conform micii teorme a lui Fermat). Deci $k \mid p - 1$. Dar $n \mid 2^n - 1$ și $p \mid n$ implică $k \mid n$. Așadar k este un divizor al lui n mai mic decît p, contradicție. **32.** Numerele de forma $n_k = (p - 1)(pk + 1)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **33.** Avem $5 \mid 2^n - 3 \Leftrightarrow 4 \mid n - 3$ și $13 \mid 2^n - 3 \Leftrightarrow 12 \mid n - 4$. Se arată că nu există nici un număr natural n care să satisfacă în același timp condițiile $4 \mid n - 3$ și $12 \mid n - 4$. **34.** Observăm mai întîi că dacă $3 \nmid a$, atunci $3 \mid a + 1$ sau $3 \mid a - 1$, de unde $9 \mid a^3 + 1$ sau $9 \mid a^3 - 1$. Așadar, dacă

3 nu divide nici unul dintre numerele a, b, c, d, e, atunci $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 9k \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9, contradicție. **35.** a) Numerele $n_k = 1 - a + k(a - b)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. b) Se folosește punctul a). **37.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = 7$. **38.** Se arată că $2^{2^{n+1}} + 3$ este multiplu de 7. 4 $\rho(q(x)) = x$. **43.** Fie $u_i = q_i m + r_i$, $0 \leqslant r < m$. Observăm că $X^m - 1 = (X - 1)P(X)$. Apoi, $X^{u_i} = X^{q_i m + r_i} = X^{r_i}(X^{q_i m} - 1) + X^{r_i}$. Cum $X^m = (X - 1)P(X) + 1$, obținem $X^{q_i m} = A_i(X)P(X) + 1$, unde $A_i(X)$ este polinom în X. Deci $Q(X) = G(X)P(X) + (X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n})$. Așadar $P(X) \mid Q(X) \Leftrightarrow P(X) \mid X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n}\ (= H(X))$. Dar cum $H(X) = n_0 + n_1 X + \ldots + n_{m-1}X^{m-1}$ are gradul mai mic sau egal decît *grad* $P(X)$, rezultă că $P(X) \mid H(X) \Leftrightarrow$ există $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel încît $H(X) = \alpha P(X)$. De aici rezultă $n_0 = n_1 = \ldots = n_{m-1}$. **44.** Se poate demonstra prin inducție după $n =$ grad P. **45.** $\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) + \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(2) < \sigma(1)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) + \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1}(m(\sigma) + 1) = \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1} = -\sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)}$. Dacă $n \geqslant 4$, există pentru orice permutare pară (impară) cu condiția $\sigma(1) < \sigma(2)$ o permutare impară (pară) cu aceeași condiție $\sigma(1) < \sigma(2)$. Deci ultima sumă este zero. Deci $\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = 0$ pentru $n \geqslant 4$. Se verifică ușor că pentru $n = 2$ și $n = 3$ suma este egală cu -1.

47. $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ unde $k = \left[\frac{b}{a + b}(n + 1)\right]$. **48.** Avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 13 \cdot 102 + 1 & 13 \cdot 111 & 13 \cdot 223 \\ 13 \cdot 331 & 13 \cdot 321 + 1 & 13 \cdot 123 \\ 13 \cdot 132 & 13 \cdot 104 & 13 \cdot 131 + 1 \end{vmatrix}.$$

Folosind proprietățile determinanților, acesta rezultă egal cu

$$13k + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13k + 1, \text{ unde } k \in \mathbf{Z}. \text{ Deci } \det A \neq 0.$$

49. Cum $e \in H$ rezultă $a = ae \in bK$, de unde $a = bk$, $k \in K$ și deci $b^{-1}a \in K$. De aici rezultă $H \subset K$. **50.** Se poate observa că ecuația $x^3 - 1 = 0$ are trei soluții în $\mathbf{C}$ și doar una în $\mathbf{R}$. **52.** Avem $H \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$ și deci $H \cap \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}$, $n > 0$. De aici rezultă $n\mathbf{Q} \subset H$. Dar $n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ și deci $\mathbf{Q} = H$. **53.** Din $a^2 = b^2 \Rightarrow a = a^{-1}b^2$, $a = b^2a^{-1}$ și $ab^{-1} = a^{-1}b$. Din $a^2 = abab \Rightarrow a = bab$ și $ab^{-1} = ba$. Deci $a^{-1}b = ba$, de unde $(ab)^2 = abab = (a^{-1}b^2)b(b^2a^{-1})b = a^{-1}b^5(a^{-1}b) = a^{-1}b^5(ba) = a^{-1}(a^6)a = a^6$ (deoarece $a^2 = b^2$). Deci $a^2 = (ab)^2 = a^6 \Rightarrow a^4 = e$. De asemenea $b^4 = e$. **54.** $b^{2n} = (b^n)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Analog, $b^{3n} = (b^n)^3 = ab^3a^{-1}$.

Mai mult, $(b^n)^n = b^{n^2} = ab^na^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} = b$ (deoarece $a^2 = e$). Deci $b^{n^2} = b$, de unde $b^{n^2-1} = e$. **55.** $b^{2k} = (b^k)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Mai mult, $b^{k^2} = (b^k)^k = ab^ka^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2}$. Apoi, $(b^{k^2})^k = (a^2ba^{-2})^k = a^2b^ka^{-2} = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} \Rightarrow b^{k^3} = a^3ba^{-3}$. În general, $b^{k^m} = a^mba^{-m} = b$ (deoarece $a^m = e$). Deci $b^{k^m-1} = e$. **57.** Se folosește egalitatea $(1+1)(a+b)=(1+1)a+(1+1)b$. **58.** Dacă $u \in A$ este inversul lui $1-ab$, atunci inversul lui $1-ba$ este $1+bua$. **60.** Se folosește identitatea $(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$, precum și problema 58. **61.** Pentru a arăta că este corp se folosește problema 5, cap. XVII. Soluțiile ecuației sînt matricele $A(a, b, c, d)$ astfel încît $a=0$ și $b^2+c^2+d^2=1$. **62.** Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $\mathrm{Tr}\,A = a+d$; A verifică ecuația $x^2-(a+d)x+(ad-bc)I_2=0$. Dacă $\mathrm{Tr}\,A=0$, atunci $A^2 = (bc-ad)I_2$ și deci A^2 comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Se arată că $Tr([A, B]) = \mathrm{Tr}(AB-BA) = 0$, de unde rezultă afirmația i). Din afirmația i) se obține ii). **63.** Din $x^6 = x$ și $(-x)^6 = -x$ rezultă $x=-x$, adică $2x=0$, oricare ar fi $x \in A$. Din $(x+1)^6 = x+1$, dezvoltînd membrul stîng, se obține: $(x^6-x)+2(3x^5+7x^4+10x^3+7x^2+3x)+(x^4+x^2)=0$, de unde $x^4+x^2=0$, adică $x^4=-x^2=x^2$. Înmulțind ambii membri ai egalității $x^4=x^2$ cu x^2 se obține că $x^2=x$.

BIBLIOGRAFIE

1) *Alef$_0$, Algebră (Numere reale, calcul numeric, numere complexe)*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1974.

2) Becheanu M., Căzănescu V., Năstăsescu C., Rudeanu S., *Logică matematică și teoria mulțimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Ed. didactică și pedagogică, București, 1972.

3) Călugărița Gh., Mangu V., *Probleme de matematică pentru treapta I și a II-a de liceu*, Ed. Albatros, București, 1977.

4) Commissaire H., Anzemberger E., *Exercices d'Algèbre et de Trigonomètrie*, Paris, 1923.

5) Coșniță C., Turtoiu F., *Culegere de probleme de algebră*, Ed. tehnică, București, 1972.

6) Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*, Ed. tehnică, București, 1977.

7) Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. H., *Posobie po matematike dlia postupaiușcih v vuzi*, Moskva, 1976.

8) Fadeev D. K., Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Ed. tehnică, București, 1954.

9) Georgescu-Buzău E., Matei N., *Exercițiî de teoria mulțimilor*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1969.

10) Iaglom I. M., Iaglom A. N., *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. tehnică, București, 1962.

11) Ioachimescu A. G., Culegere de probleme de algebră, ediția a V-a, Ed. didactică și pedagogică, București, 1968.

12) Ionescu-Țiu C., Pîrșan L., *Algebră și analiză matematică pentru admitere în facultate*, Ed. Albatros, București, 1974.

13) Ikramov H. D., *Zadacinik po lineinoi algebre*, Moskva, 1975.

14) Kuterov A., Rubanov A., *Zadacinik po algebre i elementarnîm funcțiiam*, Moskva, 1974.

15) Năstăsescu C., *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1974.

16) Niță C., Spircu T., *Probleme de structuri algebrice*, Ed. tehnică, București, 1974.

17) Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară*, Ed. tehnică, București, 1955.

18) Perju C., Perju R., *Probleme de matematică pentru admitere în învățămîntul superior*, Ed. militară, București, 1974.
19) Rusu E., *Aritmetică și teoria numerelor*, Ed. tehnică, București, 1964.
20) Sklearski D.O., Cențov N.N., Iaglom I.M., *Izbrannîe zadacii teoremî elementarnoi matematiki (Arifmetica i algebra)*, Moskva, 1965.
21) Sominski I.S., Golovina L.I., Iaglom I.M., *O matematicescoi inducții*, Moskva, 1967.
22) Stamate I., Crișan I., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică pentru licee*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1969.
23) Stamate I., Stoian I., *Culegere de exerciții și probleme de algebră*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1979.
24) *Matematică—Algebră* (manuale de liceu clasele IX—XII, ediția 1980) Ed. didactică și pedagogică, București. 1980.
25) Colecția „Gazeta matematică-seria B".
26) Colecția „Matematika v șkole".

CUPRINS

PARTEA ÎNTÎI
ENUNȚURI

CAP. I. *Elemente de logică matematică* 3
CAP. II. *Mulțimi* 5
CAP. III. *Funcții* 9
CAP. IV. *Numere reale (structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)* 13
CAP. V. *Funcția de gradul al doilea. Inecuații. Sisteme de ecuații* 25
CAP. VI. *Puteri și radicali* 36
CAP. VII. *Numere complexe* 48
CAP. VIII. *Funcția exponențială și funcția logaritmică* 53
CAP. IX. *Inducția matematică* 60
CAP. X. *Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton* 65
CAP. XI. *Progresii aritmetice și progresii geometrice* 71
CAP. XII. *Noțiuni de aritmetica numerelor întregi* 78
CAP. XIII. *Polinoame cu coeficienți complecși. Ecuații algebrice* 82
CAP. XIV. *Permutări* 90
CAP. XV. *Matrice* 93
CAP. XVI. *Determinanți* 96
CAP. XVII. *Rangul unei matrice. Matrice inversabile* .. 100
CAP. XVIII. *Sisteme de ecuații liniare* 104
CAP. XIX. *Legi de compoziție. Grupuri* 107
CAP. XX. *Inele și corpuri* 116
CAP. XXI. *Probleme pentru concursuri de matematică* 122

PARTEA A DOUA
INDICAȚII, SOLUȚII, RĂSPUNSURI

CAP. I. *Elemente de logică matematică* 127
CAP. II. *Mulțimi* 127
CAP. III. *Funcții* 129
CAP. IV. *Numere reale (Structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)* 131
CAP. V. *Funcția de gradul al doilea. Inecuații. Sisteme de ecuații* 140
CAP. VI. *Puteri și radicali* 152
CAP. VII. *Numere complexe* 158

CAP. VIII. *Funcția exponențială și funcția logaritmică* 161
CAP. IX. *Inducția matematică* 166
CAP. X. *Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton* 171
CAP. XI. *Progresii aritmetice și progresii geometrice*.... 174
CAP. XII. *Noțiuni de aritmetica numerelor întregi*...... 179
CAP. XIII. *Polinoame cu coeficienți complecși. Ecuații algebrice* 183
CAP. XIV. *Permutări*................................ 192
CAP. XV. *Matrice*................................... 193
CAP. XVI. *Determinanți*............................. 195
CAP. XVII. *Rangul unei matrice. Matrice inversabile*.. 196
CAP. XVIII. *Sisteme de ecuații liniare*............. 199
CAP. XIX. *Legi de compoziție. Grupuri*.. 202
CAP. XX. *Inele și corpuri*.......................... 203
CAP. XXI. *Probleme pentru concursuri de matematică*.. 213
Bibliografie 219